Das Projekt

„Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“

– Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen –

Projektteam:

M. Dangl – R. Fischer – H. Heugl – B. Kröpfl –
M. Liebscher – W. Peschek – H.-St. Siller

Version 9/09

Herausgegeben vom

Institut für Didaktik der Mathematik
Österr. Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik
IFF, Universität Klagenfurt

September 2009

Inhaltsübersicht

Projektauftrag und -organisation 3

Möglichkeiten und Grenzen der sRP aus Mathematik 5

Bildungstheoretische Orientierungen 8

Ein Modell für die zentrale sRP im Schulversuch 11

Mathematische Grundkompetenzen für die Sekundarstufe II 13

- Inhaltsbereich Algebra und Geometrie 15
- Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten 23
- Inhaltsbereich Analysis 33
- Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik 41

Eckdaten des Schulversuchs 52

Projektauftrag und -organisation

In einem am 13. 7. 2008 zwischen dem bm:ukk (vertreten durch das bifie) und dem AECC-M abgeschlossenen Werkvertrag wurde das AECC-M mit der Konzeption, Vorbereitung, Durchführung, Begleitung, Unterstützung und Evaluation eines ***Schulversuchs*** *„Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“* an AHS betraut, bei dem die schriftliche Reifeprüfung in Mathematik anhand zentral gestellter Aufgaben erfolgen soll.
Als Intentionen für eine Zentralisierung der schriftlichen Reifeprüfung wurden vom Auftraggeber eine „stärkere Objektivierung“ der schriftlichen Reifeprüfung und eine „bessere Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse“ genannt.

Die vorliegende Konzeption des Schulversuchs wurde im Schuljahr 2008/09 entwickelt. Die inhaltliche und organisatorische Vorbereitung des Schulversuchs erfolgt in einer zweieinhalbjährigen Pilotphase in den Schuljahren 2009/10, 2010/11 und 2011/12, der Schulversuch beinhaltet für die am Schulversuch beteiligten Klassen bzw. Schulen eine zentrale schriftliche Reifeprüfung (sRP) im Fach Mathematik im Mai 2012.
Bis Ende 2012 ist ein Endbericht zu erstellen, der neben einer Darlegung des eingesetzten Konzepts und der in der Pilotphase und im Schulversuch gewonnenen Erfahrungen bzw. Evaluationsergebnisse auch Vorschläge für die künftige Gestaltung der (schriftlichen) Reifeprüfung aus Mathematik beinhalten soll.

Für die im Rahmen des Projekts zu leistenden inhaltlichen und organisatorischen Arbeiten wurde ein Projektteam, bestehend aus 13 Vertreter(inne)n der Fachdidaktik Mathematik, der Schulaufsicht und der Schulpraxis zusammengestellt; die Projektmitarbeiter(innen) sind in unterschiedlichen Gruppierungen für verschiedene Aufgaben zuständig bzw. verantwortlich (siehe folgende Seite).
Das Projektteam wird bei der Wahrnehmung seiner Aufgaben inhaltlich und organisatorisch von weiteren Mitarbeiter(inne)n des AECC-M unterstützt.

In der Pilotphase sollen ca. 20 österreichische Schulen (AHS), die sich am Schulversuch beteiligen wollen, durch Projektmitarbeiter(innen) begleitet, beraten und unterstützt werden. Die ausgewählten Pilotschulen sollen sich möglichst gleichmäßig auf die Regionen Ost (Wien, Niederösterreich), Süd (Burgenland, Steiermark, Kärnten) sowie West (Vorarlberg, Tirol, Salzburg, Oberösterreich) verteilen und werden jeweils regional von einer Projekt-Arbeitsgruppe betreut.

Personelle Organisation und Aufgabenverteilung

Leitungsteam

R. Fischer
H. Heugl
M. Liebscher
W. Peschek (Projektleitung)

verantwortlich für die Projektabwicklung:
- Prozesssteuerung, Organisation
- Vertretung nach außen
- Expert(inn)entagungen

Steuerungs- und Kontrollgruppe

Leitungsteam
M. Dangl
B. Kröpfl
H.-St. Siller
allenfalls ext. Expert(inn)en

verantwortlich für inhaltliche Entwicklungen und Qualitätskontrolle:
- Rahmenkonzept für die zentrale sRP
- Informationsveranstaltung für Pilot- bzw. Versuchsschulen
- Materialien für die Pilotphase
- Steuerung der Aufgabenentwicklung und Abnahme der Aufgaben für die Pilottests und die Reifeprüfung 2012; Erstellung der Korrekturanleitungen
- Auswahl der Pilotschulen (gem. m. bifie)
- Interpretation der Ergebnisse der Pilottests und der Reifeprüfung
- Feedbackveranstaltung für die Versuchsschulen
- Erstellung des Abschlussberichts

Arbeitsgruppe Ost

M. Dangl (Leitung)
M. Binder
A. Dorfmayer

zuständig für
- Aufgabenentwicklung
- Betreuung der Schulen
- org. Unterstützung der Pilottests/Reifeprüfung
- Kontrolle der Korrekturen
- 5 regionale Veranstaltungen
- ständige Evaluation und Abschlussevaluation

Arbeitsgruppe Süd

B. Kröpfl (Leitung)
G. Hainscho
W. Knechtl

zuständig für
- Aufgabenentwicklung
- Betreuung der Schulen
- org. Unterstützung der Pilottests/Reifeprüfung
- Kontrolle der Korrekturen
- 5 regionale Veranstaltungen
- ständige Evaluation und Abschlussevaluation

Arbeitsgruppe West

H.-St. Siller (Leitung)
W. Mayer
E. Willau

zuständig für
- Aufgabenentwicklung
- Betreuung der Schulen
- org. Unterstützung der Pilottests/Reifeprüfung
- Kontrolle der Korrekturen
- 5 regionale Veranstaltungen
- ständige Evaluation und Abschlussevaluation

Möglichkeiten und Grenzen einer zentralen sRP aus Mathematik

Kritik an der traditionellen sRP aus Mathematik

Den seitens der Bildungsbehörde eingebrachten Intentionen für die Einführung einer zentralen sRP, „stärkere Objektivierung“ und „bessere Vergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse“, liegt die berechtigte Annahme zugrunde, dass die traditionellen sRP von den jeweiligen Klassenlehrer(inne)n individuell sehr unterschiedlich gestaltet und die Ausarbeitungen der Maturant(inn)en sehr unterschiedlich bewertet werden, sodass die Anforderungen und Bewertungen der sRP bei verschiedenen Lehrer(inne)n kaum vergleichbar sind.

Aus fachdidaktischer Sicht erscheinen (mindestens) folgende Kritikpunkte zentral:

- Der Tradition von Schularbeiten folgend, werden vorrangig kurzfristig verfügbare mathematische Fähigkeiten abgeprüft, seltener Kompetenzen (= längerfristig verfügbare Fähigkeiten und Dispositionen).
- Bei den Aufgabenstellungen der traditionellen sRP ist eine deutliche Dominanz von relativ komplexen, rechnerisch aufwändigen „Problemlöseaufgaben“ zu beobachten und im Zusammenhang damit
    - eine deutliche Dominanz von Inhalten/Aufgaben, die eine rezeptartige Reproduktion (bis hin zur „Dressur des Unverstandenen“) erlauben bzw. erfordern (und damit den Problemlöseanspruch pervertieren),
    - eine sehr deutliche Dominanz des Operativen.
- Eine weitgehende „Gleich-Gültigkeit“ der Inhalte: was immer im Unterricht behandelt bzw. von dem/der jeweiligen Lehrer(in) verlangt wird, ist „Kernstoff“, Grundkompetenzen werden kaum bzw. nur implizit (in komplexen Aufgaben verpackt) abgeprüft.
- Ein gemeinsam geteiltes mathematisches Wissen und Können (eine Vergemeinschaftung des Wissens und Könnens) ist kaum identifizierbar.
- Die Objektivität der Beurteilung ist nicht bzw. nur unzureichend gegeben.
- Die Lehrer(innen)rolle erscheint problematisch (Förderung vs. Selektion).

Sicherung mathematischer Grundkompetenzen

Eine sRP, bei der die Aufgaben zentral gestellt werden, kann zwar die Unvergleichbarkeit der Bildungsabschlüsse nicht generell beseitigen (was in einem differenzierten Schulsystem ja auch kaum intendiert ist), sie vereinheitlicht jedoch einen Teil der Leistungsanforderungen. Mit anderen Worten: Mit einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung wird für einen Teil der Reifeprüfung eine bundesweite Vereinheitlichung der „objektiven“ (d. h. in Aufgabenstellungen materialisierten) Leistungsanforderung geschaffen und damit ein transparenter und einheitlicher Kanon gemeinsam geteilter mathematischer Kompetenzen gesichert.
In ähnlicher Weise könnte durch eine zentrale Bewertung der Arbeiten eine weitgehende Objektivität bezüglich der Beurteilung erreicht werden. Partielle Verbesserungen hinsichtlich der Objektivität sind durch klassenfremde Begutachter(innen), durch Zweitbegut-

achter(innen) oder auch durch kontrollierte Begutachtungen durch die Klassenlehrer(innen) auf der Basis von genauen Korrekturanleitungen möglich.
Vereinheitlichung und Objektivierung stoßen natürlich sehr rasch an ihre Grenzen, wenn man auch die unterschiedliche Vorbereitung der Schüler(innen) im Rahmen des Unterrichts in Betracht zieht.

Der zuvor aus fachdidaktischer Sicht formulierten Kritik an der traditionellen sRP kann in einer entsprechend konzipierten zentralen sRP weitgehend Rechnung getragen werden. Insbesondere ermöglicht, ja erfordert, eine zentrale sRP mit einheitlichen Anforderungen an alle österreichischen Maturant(inn)en eine Fokussierung auf sorgsam ausgewählte und gut begründete Kompetenzen, die aufgrund ihrer fachlichen und gesellschaftlichen Relevanz grundlegend und unverzichtbar sind. Derartige Kompetenzen werden (im Projekt) als „Grundkompetenzen“ bezeichnet; in ihrer Identifizierung sowie in ihrer Vermittlung liegt die zentrale fachdidaktische bzw. unterrichtspraktische Herausforderung des Projekts.
Den wesentlichen fachdidaktischen wie auch bildungsbezogenen Gewinn einer zentralen sRP aus Mathematik sehen wir darin, diese Grundkompetenzen als ein von allen österreichischen Maturant(inn)en gemeinsam geteiltes mathematisches Wissen und Können zu gewährleisten. Kurz gefasst: **Das wesentliche Ziel einer zentralen sRP aus Mathematik ist die Sicherung mathematischer Grundkompetenzen für alle österreichischen Maturant(inn)en.**

Wahrung und Nutzung von Freiräumen

Der legitimen Forderung nach Gemeinsamkeit, Verbindlichkeit und Einheitlichkeit steht die ebenso legitime Forderung nach (äußerer und innerer) Differenzierung bis hin zur Individualisierung sowie nach Autonomie gegenüber. Dabei ist das Verhältnis von Verbindlichkeit und Freiraum ein dialektisches: Verbindlichkeiten müssen nur dort klar ausgewiesen sein, wo auch Freiräume gewährt und genutzt werden sollen, Freiräume ohne Verbindlichkeiten sind als solche gar nicht wahrnehmbar.

Zentrale Reifeprüfungen (wie übrigens auch Bildungsstandards) sind der Versuch, Gemeinsamkeiten verbindlich für alle festzulegen (im Idealfall auszuhandeln). Dies erscheint vernünftig und legitim, wenn damit zugleich auch die Freiräume klar definiert werden. Diese Freiräume sind dann nachweislich für schultypenspezifische, schulspezifische, lehrer(innen)-spezifische, klassenspezifische oder auch schüler(innen)spezifische Schwerpunktsetzungen zu nützen.

Konkreter im vorliegenden Kontext: Ein Mathematikunterricht, der sich der Sicherung von wohl begründeten Grundkompetenzen entzieht, ist bildungstheoretisch wie gesellschaftlich inakzeptabel und weitgehend obsolet. Ein Mathematikunterricht, der sich auf die Vermittlung von Grundkompetenzen beschränkt (sofern dies überhaupt möglich ist), ist armselig und ebenso inakzeptabel.

Die neue Reifeprüfung (die bei Schuleintritt beginnt und nicht erst am Ende der 12. oder 13. Schulstufe stattfindet) muss diese Dialektik von Verbindlichkeit und Freiraum wahrnehmen und produktiv bearbeiten. **Das bedeutet vor allem, dass die in den Freiräumen erbrachten Leistungen der Schüler(innen) entsprechend gewürdigt und prominent ausgewiesen werden müssen.**

Verschiedene mathematische Fähigkeiten und deren Messbarkeit/Testbarkeit

Mathematische Fähigkeiten/Kompetenzen (kognitive Dispositionen) werden anhand erbrachter mathematischer Leistungen sichtbar und partiell überprüfbar. Dem breiten Spektrum mathematischer Fähigkeiten/Kompetenzen steht ein (weniger breites) Spektrum mathematischer Leistungen gegenüber, das man z. B. in folgende Bereiche gliedern kann:

a) *Mathematische Leistungen, die durch eine punktuelle (schriftliche) Überprüfung abgerufen werden können und von allen Schüler(inne)n einer bestimmten Schulstufe erbracht werden sollen.*
   Dabei werden grundlegende mathematische Fähigkeiten angesprochen, die allen Schüler(inne)n längerfristig verfügbar sein sollen („Grundkompetenzen“) und einer produkt- bzw. zustandsorientierten (schriftlichen) Überprüfung zugänglich sind.
   Nur solche mathematischen Fähigkeiten/Kompetenzen können sinnvoll Gegenstand von (internationalen) Vergleichstests, von Standards bzw. von zentralen schriftlichen Reifeprüfungen sein.

b) *Mathematische Leistungen, die durch punktuelle Überprüfungen abgerufen werden können und von einzelnen, mehreren oder allen Schüler(inne)n einer (relativ homogenen) Schüler(innen)population erbracht werden sollen.*
   Dabei werden tendenziell eher speziellere, oft nur kurzfristig verfügbare mathematische Fähigkeiten angesprochen, die von einzelnen, mehreren oder Gruppen von Schüler(inne)n in gleicher Weise verlangt werden und einer produkt- bzw. zustandsorientierten Überprüfung zugänglich sind.
   In solchen mathematischen Fähigkeiten/Kompetenzen können schultypenspezifische, schulspezifische, lehrer(innen)spezifische, klassenspezifische oder auch schüler(innen)-spezifische Schwerpunktsetzungen zum Ausdruck kommen. Typische Formen der Leistungsüberprüfung sind hier Schularbeiten, schriftliche oder mündliche Ausarbeitungen (Ausarbeitung von Themen, Referate, Bearbeitung von Arbeitsblättern etc.).

c) *Prozessorientierte (nicht systematisierbare, kreative) mathematische Leistungen, die von einzelnen, mehreren oder allen Schüler(inne)n einer (relativ homogenen) Schüler(innen)population erbracht werden sollen, jedoch nicht durch einfache produkt- bzw. zustandsorientierte Leistungsmessungen erfasst werden können.*
   Es werden hier mathematische Fähigkeiten angesprochen, die weniger durch einen bestimmten Zustand beschrieben werden können, sondern sich anhand entsprechender Verhaltensweisen und Entwicklungen im Verlauf eines Prozesses zeigen.
   Es kann sich dabei um affektive und soziale Fähigkeiten handeln, vor allem aber auch um „höhere“ kognitive Fähigkeiten wie etwa (mathematische) Kreativität oder die Fähigkeit zur Reflexion.
   Typische Evaluationsmethoden sind hier Prozessbeobachtungen (individuell oder von Gruppen), Beurteilung von Prozessplanungen (z. B. Projektplanungen) oder Prozessdokumentationen (zB PC-Protokoll, Portfolio).

Nur die unter a) genannten Leistungen sind einer zentralen sRP zugänglich. Die unter b) beschriebenen Leistungen erfordern spezifische, auf die jeweilige Schüler(innen)population und die unterrichtlichen Schwerpunktsetzungen abgestimmte Aufgabenstellungen. Die unter c) angeführten Leistungen sind durch eine punktuelle Überprüfung allein nicht erfassbar.

Bildungstheoretische Orientierungen

Kaum eine andere Aufgabe der Schule findet derart breite öffentliche Zustimmung wie die, dass die Schule die Heranwachsenden mit dem für das Leben in unserer Gesellschaft notwendigen Wissen und Können ausstatten solle. Aus der Sicht der Schüler(innen) und Eltern entspricht dieser Forderung der legitime Anspruch auf die persönliche Verwertbarkeit dessen, was in der Schule gelernt wird; aus der Sicht der Gesellschaft sichert die Schule dadurch den Fortbestand, die Reproduktion der Gesellschaft.
Der breite Konsens zerbricht jedoch sehr schnell, wenn Konkretisierungen notwendig werden. Die Gründe dafür liegen (oftmals verdeckt) in unterschiedlichen Weltbildern und Weltsichten, sehr wesentlich aber auch in verschiedenen Lebenswelten und Lebenskonzepten, die den Heranwachsenden jeweils zugedacht werden.

Für die Pflichtschule kann Lebensvorbereitung *in einem engeren Sinn* als Ausstattung mit jenem Wissen und Können verstanden werden, das für eine aktive und selbstbestimmte Teilnahme am (Alltags-)Leben in unserer Gesellschaft unmittelbar erforderlich erscheint[1].

Für weiterführende Schulen wird Lebensvorbereitun*g in einem weiteren Sinn* als Befähigung zur **Kommunikation mit Expert(inn)en und der Allgemeinheit**[2] verstanden:
Die Kommunikation zwischen Expert(inn)en und Lai(inn)en wird heute als ein zentrales Problem unserer arbeitsteilig organisierten, demokratischen Gesellschaft gesehen: Der mündige Bürger und die mündige Bürgerin werden in vielen Situationen des öffentlichen, beruflichen und privaten Lebens Expert(inn)enmeinungen einholen müssen oder werden mit Meinungen von Expert(inn)en konfrontiert, die sie verstehen, bewerten und zu ihrer eigenen Erfahrungswelt in Beziehung setzen müssen, um entsprechende Entscheidungen treffen zu können.
Den durch weiterführende Schulen „höher Gebildeten“ kann dabei eine wichtige Vermittlerrolle zukommen: Sie sollten in der Lage sein, Meinungen von Expert(inn)en einzuholen, diese zu verstehen, Expertisen verständlich zu erklären und Vorschläge für die Bewertung und Integration von Expert(inn)enmeinungen zu entwickeln.
Eine solche *Fähigkeit zur Kommunikation mit Expert(inn)en und mit der Allgemeinheit* wird hier als ein bildungstheoretisch motiviertes *Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten* an weiterführenden Schulen gesehen.

Grundwissen und Reflexion(swissen)

Notwendige Voraussetzungen für die Verständigung mit Expert(inn)en sind fundierte Kenntnisse bezüglich grundlegender (mathematischer) Begriffe, Konzepte, Darstellungsformen und Anwendungsgebiete. Dies wird hier als *Grundwissen* bezeichnet.

---

1 Vgl. Heymann, H. W. (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Bd. 13. Beltz, Weinheim und Basel, S. 51-65 und S. 134-154.

2 Vgl. dazu insbesondere die sehr viel ausführlicheren Darlegungen in Fischer, R. (2001): *Höhere Allgemeinbildung*. In: Fischer-Buck, A. u. a. (Hrsg.): Situation – Ursprung der Bildung. Franz-Fischer-Jahrbuch der Philosophie und Pädagogik 6. Universitätsverlag, Leipzig, S. 151-161.

Für einen verständigen Umgang mit Grundwissen, insbesondere aber auch für die Beurteilung von fachlichen Expertisen und deren Integration in den jeweiligen Problemkontext, ist *Reflexion(swissen)* erforderlich: Was bewirken die jeweiligen Begriffe bzw. Verfahren, was leisten sie im interessierenden Kontext, wo sind ihre Grenzen?

Weltorientierung als Einführung in unterschiedliche Weltsichten[1]

Weltorientierung meint vordergründig, die Heranwachsenden mit materiellem Wissen über die Welt auszustatten, sie über die Begrenztheit des jeweils individuellen Erfahrungshorizonts, ihrer eigenen Lebenswelt und ihres eigenen Lebenskonzepts hinauszuführen und sie Sinn und Bedeutung in der „Welt des Wissens" (und der Wissenschaften) erfahren zu lassen.
Etwas tiefgründiger meint Weltorientierung, sich unterschiedlicher Modi der Weltbegegnung bewusst zu werden, verschiedene Weltbilder bzw. Weltsichten in ihrer Unterschiedlichkeit als „inkommensurable, aber komplementäre Wahrnehmungsperspektiven der Welt" (Dressler 2007, S. 1)[1] zu begreifen.
Mathematik ist *ein* möglicher Modus der Weltbegegnung, eine spezifische Brille, die Welt um sich herum zu sehen bzw. zu modellieren. Wie sie dies tut (als Darstellungsform und als Denktechnologie), erscheint aus bildungstheoretischer Sicht nachrangig gegenüber der Frage, welchen Begrenzungen sie unterliegt und wodurch sie sich von anderen Modi der Weltmodellierung unterscheidet:

> „Nur wenn gewusst wird, welche *Perspektive* und welcher damit verbundene Geltungsanspruch in einem Fach gilt, werden die Lernergebnisse valide und nachhaltig sein – und zur allgemeinen Bildung sinnvoll beitragen." (Dressler 2007, S. 3)[1]

Dies gilt schon für die Mathematik in der Pflichtschule (für die mathematische Lebensvorbereitung im engeren Sinn), ganz besonders aber für die Mathematik an weiterführenden Schulen (für die Lebensvorbereitung im Sinne der Fähigkeit zur Kommunikation mit Expert(inn)en und der Allgemeinheit).

Die Rolle der Computer/Technologie

Die Entwicklung von Mathematik wurde immer von aktuellen Werkzeugen beeinflusst. Die im Zeitalter der Informationstechnologie verfügbaren elektronischen Werkzeuge eröffnen eine neue Dimension des Mathematiklernens und -treibens:

Kognition wird durch elektronische Hilfsmittel nicht nur unterstützt, elektronische Medien werden vielmehr zu einem Teil der Kognition und verändern Kognition. Die Unterstützung erfolgt durch die Möglichkeit der Auslagerung komplexerer Operationen auf das Werkzeug, durch die leichtere Verfügbarkeit „klassischer" mathematischer Modelle und die effiziente Nutzbarkeit rechenaufwändiger Modelle (wie zum Beispiel Differenzengleichungen).

---

[1] Vgl. etwa:

Heymann, H. W. (1996): *Allgemeinbildung und Mathematik*. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik, Bd. 13. Beltz, Weinheim und Basel, S. 79 ff.

Dressler, B. (2007): *Kompetenzorientierung des Unterrichts aus bildungstheoretischer Sicht. Überlegungen zu einer Didaktik des Perspektivenwechsels*. Vortrag am Kongress der Gesellschaft für Fachdidaktik, Essen 18. 9. 2007, Vortragstyposkript, 11 S.

Es kommt zu einer Verschiebung von der Ausführung zur Planung von Problemlösungen und damit zu einer Schwerpunktverlagerung vom Operieren zum Nutzen von Grundwissen und zum Reflektieren. Technologie zwingt zur innermathematischen Reflexion, weil über Ergebnisse reflektiert werden muss, die man nicht selber produziert hat und unterstützt kontextbezogene Reflexion.

Im Gegensatz zu traditionellen numerischen Taschenrechnern sind elektronische Medien heute nicht nur Rechenwerkzeuge, sie sind auch Kommunikationsmittel. Sie ermöglichen und unterstützen die Visualisierung abstrakter Objekte und Beziehungen, sie verändern Kognition durch die Veränderungen der verfügbaren mathematischen Sprache: Lernende wie auch Anwender(innen) entwickeln in der Kommunikation mit dem elektronischen Medium neue Sprachelemente und nutzen Sprachelemente, die vom Medium angeboten werden.

Mathematikunterricht an weiterführenden Schulen

Die vorangegangenen Überlegungen verweisen darauf, dass der Mathematikunterricht an weiterführenden Schulen bildungstheoretisch nicht als bloße Weiterführung des Mathematikunterrichts der Pflichtschule mit (teilweise) anderen Inhalten begründet werden kann. Neben neuen Inhalten (die die Kommunikation mit Expert(inn)en erleichtern) und einem verstärkten Einsatz von Computertechnologie sind es vor allem höhere Ansprüche hinsichtlich Reflexion und Kommunikation (mit und über Mathematik), die den Mathematikunterricht an höheren Schulen von jenem in der Pflichtschule unterscheidet.
Die Reflexion bezieht sich dabei nicht nur auf neu hinzukommende Inhalte, sondern auch auf die aus der Pflichtschule bekannten mathematischen Inhalte: Durch Reflexion soll Ordnung und Übersicht geschaffen sowie ein tieferes, wissenschaftspropädeutisches Verständnis dieser Inhalte entwickelt und so die Fähigkeit zur Kommunikation mit der Allgemeinheit gefördert und erweitert werden.
Fachspezifische Lebensvorbereitung für alle und Orientierung in der eigenen Erfahrungs- und Lebenswelt sollen durch den Mathematikunterricht weiterführender Schulen, also durch eine über die eigene Lebenswelt hinausgehende, reflektierte Weltorientierung und eine besondere Befähigung zur kommunikativen Vermittlung zwischen Expert(inn)en und der Allgemeinheit, ergänzt und erweitert werden.

Nicht alle diese bildungstheoretischen Orientierungen lassen sich in einer zentralen sRP angemessen abbilden (vgl. S. 7), vieles davon wird man den unterrichtlichen Freiräumen überantworten müssen. Eine zentrale sRP kann jedoch und sollte auf das zuvor beschriebene (reflektierte) Grundwissen und dessen flexible Nutzung (vor allem in Kommunikationssituationen) fokussieren.

Ein Modell für die zentrale sRP im Schulversuch

Der zunächst recht weitreichend erscheinende inhaltliche und organisatorische Handlungsspielraum für die Erprobung unterschiedlicher Modelle erfuhr im ersten Projektjahr Veränderungen und Einschränkungen dadurch, dass Genehmigungen nur für solche Schulversuchsanträge in Aussicht gestellt wurden, die sich im Rahmen des 2009 zu beschließenden Gesetzes und späterer Verordnungen bewegen. Für das gegenständliche Projekt bedeutet dies, dass nur ein Konzept mit vollzentraler sRP auf Basis der geltenden Lehrpläne und der aktuellen Leistungsbeurteilungsverordnung im Rahmen eines Schulversuchs erprobt werden kann.

Die Leistungsbeurteilungsverordnung 1974 liefert in § 14 eine Festlegung der Beurteilungsstufen (Noten), die auch der zentralen sRP zugrunde gelegt werden müssen.
Dieser Verordnung entsprechend sind Leistungen, mit denen die lehrplanmäßigen Anforderungen *in wesentlichen Bereichen überwiegend erfüllt* werden, mit „genügend", Leistungen, mit denen die lehrplanmäßigen Anforderungen *in den wesentlichen Bereichen zur Gänze erfüllt* werden, mit „befriedigend" zu beurteilen. Beim „befriedigend" können Mängel in der Durchführung durch merkliche Ansätze zur Eigenständigkeit ausgeglichen werden.
Eine sinnvolle Interpretation der „wesentlichen Bereiche" ergibt sich mit Hilfe von Grundkompetenzen: Wer über die festgelegten Grundkompetenzen in überwiegendem Maße (z. B. 75%) verfügt, soll mit „genügend", wer über sie zur Gänze (100%) verfügt, soll mit „befriedigend" beurteilt werden.
In diesen beiden Notenfestlegungen ist, sieht man von dem kompensatorischen Hinweis beim „befriedigend" ab, noch nicht die Rede von Leistungen, die über das Wesentliche hinausgehen, insbesondere Eigenständigkeit und selbständige Anwendung auf neuartige Situationen erfordern.
Es wird bei der zentralen sRP also einen Teil 1 geben (müssen), der diesen beiden Notenfestlegungen Rechnung trägt, also auf Grundkompetenzen fokussiert, ohne dabei besondere Eigenständigkeit oder gar Fähigkeiten zur selbständigen Anwendung des Wissens und Könnens zu erfordern.

Für die Note „gut" sind gemäß Leistungsbeurteilungsverordnung Leistungen erforderlich, die *über das Wesentliche hinausgehen*, insbesondere *merkliche Ansätze zur Eigenständigkeit* sowie bei entsprechender Anleitung die *Fähigkeit zur Anwendung des Wissens und Könnens auf neuartige Aufgaben* erkennen lassen. Für die Note „sehr gut" müssen die Leistungen *weit über das Wesentliche hinausgehen* und deutliche *Eigenständigkeit* bzw. *Fähigkeiten zur selbständigen Anwendung in neuartigen Situationen* zeigen.
Es wird bei der zentralen sRP somit auch einen Teil 2 geben (müssen), in dem Aufgaben gestellt werden, die eine gewisse Eigenständigkeit im Einsatz der Grundkompetenzen sowie eine selbständige Anwendung der Grundkompetenzen in neuartigen Situationen erfordern – wobei zu beachten ist, dass Eigenständigkeit und selbständige Anwendung in der Verordnung nicht absolut (zur Gänze, bei jeder Aufgabe) gefordert werden.

Diesen Überlegungen versucht das im Folgenden vorgeschlagene Modell Rechnung zu tragen:

Ein Modell für die zentrale sRP: „Grundkompetenzen und selbständige Anwendung“

Dauer der schriftlichen Prüfung: 4 Stunden

Teil 1 (muss nach 120´ abgegeben werden)
Inhalt: Aufgaben mit 15 – 25 Items

Teil 2
Inhalt: 6-8 Aufgaben; die Aufgaben zielen (wie jene in Teil 1) auf Grundkompetenzen ab, sie erfordern jedoch eine selbständige Anwendung der Grundkompetenzen in weniger vertrauten Situationen oder auch weitergehende Reflexionen; die Aufgabenstellungen sind tendenziell umfassender und/oder ihre Bearbeitung ist aufwändiger

Benotung der sRP: (jeder der beiden Teile wird mit 100% angesetzt)

Genügend:	mindestens 75% von Teil 1 richtig gelöst
Befriedigend:	mindestens 75% von Teil 1 richtig gelöst und darüber hinaus mindestens weitere 25% aus Teil 1 und 2 zusammen
Gut:	mindestens 75% von Teil 1 richtig gelöst und darüber hinaus mindestens weitere 50% aus Teil 1 und 2 zusammen
Sehr gut:	mindestens 75% von Teil 1 richtig gelöst und darüber hinaus mindestens weitere 75% aus Teil 1 und 2 zusammen

In beiden Teilen sind die jeweils gewohnten Hilfsmittel (Technologie, Formelsammlung etc.) zugelassen, einfache Taschenrechner (mit y^x, sin, cos, log, ln und einem Speicher) sind jedenfalls erforderlich.

Die in den Freiräumen/Schwerpunktsetzungen erbrachten Leistungen gehen über die Note der Abschlussklasse in das Abschlusszeugnis ein.

Mathematische Grundkompetenzen für die Sekundarstufe II

Einführende Hinweise

Die zentrale fachdidaktische Herausforderung des Projekts liegt in der Identifizierung und Konkretisierung sowie Operationalisierung jener Grundkompetenzen, die auf wesentliche inhaltliche Bereiche der Mathematik in der Oberstufe fokussieren und aufgrund ihrer fachlichen sowie gesellschaftlichen Relevanz grundlegend, unverzichtbar und zugleich einer punktuellen schriftlichen Überprüfung zugänglich sind.

Ausgangspunkt und Basis für die Identifizierung von derartigen Grundkompetenzen ist der Lehrplan für den Mathematikunterricht an AHS. Ausgehend von den dort festgelegten Inhaltsbereichen und Inhalten sowie unter Berücksichtigung der angeführten Bildungsziele sind die für die zentrale sRP relevanten mathematischen Grundkompetenzen auszuhandeln und festzulegen. Dabei sind neben fachinhaltlichen Aspekten und Zusammenhängen insbesondere auch bildungstheoretische Überlegungen (siehe S. 8ff) leitend.
Das Kernstück der bildungstheoretischen Orientierung der zentralen sRP bildet eine in einem weiteren Sinne verstandene Lebensvorbereitung, die insbesondere als *Befähigung zur Kommunikation mit Expert(inn)en und mit der Allgemeinheit* gedeutet wird. Eine solche Kommunikationsfähigkeit wird als entscheidendes Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten und daran gebundener Kompetenzen gesehen.
Wie R. Fischer (2001)[1] näher ausführt und begründet, sind verständiges *Grundwissen* und *Reflexion(swissen)* die zentralen Voraussetzungen für eine solche Kommunikationsfähigkeit. Es wird bei der Auswahl und Festlegung von Kompetenzen, die bei der zentralen sRP angesprochen werden sollen, also darauf ankommen, jenes Grundwissen und jene Reflexionen bzw. jenes Reflexionswissen zu identifizieren, die der Kommunikation mit Expert(inn)en oder mit der Allgemeinheit besonders dienlich sein können; Einschränkungen ergeben sich allenfalls durch die jeweils geltenden Lehrpläne sowie dadurch, dass nicht alle derartigen Kompetenzen einer standardisierten schriftlichen Überprüfung zugänglich sein müssen.

Die Identifikation von Kompetenzen, die für eine gedeihliche Kommunikation mit Expert(inn)en oder mit der Allgemeinheit notwendig sind, erfordert eine genaue, systematische Analyse vielfältiger entsprechender Kommunikationssituationen.
Eine solche Analyse ist in diesem Rahmen nicht leistbar.
Partiell kann auf einschlägige Untersuchungen zurückgegriffen werden (zB bei Funktionen Kröpfl 2007[2]), in der Regel wird man sich jedoch auf subjektive Wahrnehmungen und Einschätzungen stützen müssen. Dabei können die Erfahrungen der Lehrerinnen und Lehrer wie auch der Schülerinnen und Schüler der Pilot- bzw. Versuchklassen, **Aushandlungsprozesse** zwischen diesen und der Projektgruppe, wertvolle Hinweise liefern.

---

[1] Fischer, R. (2001): *Höhere Allgemeinbildung*. In: Fischer-Buck, A. u. a. (Hrsg.): Situation – Ursprung der Bildung. Franz-Fischer-Jahrbuch der Philosophie und Pädagogik 6. Universitätsverlag, Leipzig, S. 151-161.

[2] Kröpfl, B. (2007): *Höhere mathematische Allgemeinbildung am Beispiel von Funktionen*. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 8. Profil, München-Wien, 301 S.

Aushandlungsprozesse

Ausgangspunkt und Grundlage dieser Aushandlungsprozesse sind die in den folgenden Abschnitten dargelegten, im Rahmen des Projekts von der Steuerungs- und Kontrollgruppe erarbeiteten Vorschläge für mathematische Grundkompetenzen.
Die vorgeschlagenen Grundkompetenzen und deren Konkretisierung in Aufgaben werden im Rahmen der Pilotphase mit den beteiligten Lehrerinnen und Lehrern besprochen und deren unterrichtliche Umsetzbarkeit sowie Erreichbarkeit diskutiert. (Dabei spielen auch die jeweils konkreten Erfahrungen mit den Schülerinnen und Schülern im Unterricht eine wichtige Rolle.) Wesentliche Überlegungen und Hinweise werden von den Leitern der regionalen AGs gesammelt, in die Kontroll- und Steuerungsgruppe eingebracht, dort diskutiert und allenfalls werden entsprechende Revisionen bei den Grundkompetenzen oder deren Konkretisierung in Aufgaben vorgenommen.
Wichtige Komponenten dieses Evaluierungsprozesses sind auch die vier Pilottests und die vier Vergleichstests: Die Pilottests und deren Ergebnisse sind sehr konkrete Anlässe, um mit den Lehrerinnen und Lehrern der Pilotklassen die Relevanz, vor allem aber auch die Erreichbarkeit der vorgegebenen Grundkompetenzen und die Angemessenheit der Aufgabenstellungen zu diskutieren; die Vergleichstests können wertvolle Hinweise (vor allem für die zentrale sRP-M ab 2014) liefern, in welchem Ausmaß die Anforderungen in nicht betreuten Klassen erfüllt werden.

Inhaltsbereich Algebra und Geometrie

Bildungstheoretische Orientierung

Die Algebra ist „die“ Sprache der Mathematik, in der zugleich auch zwei zentrale Ideen der Mathematik besonders deutlich sichtbar werden: Generalisierung und operative Beweglichkeit. Variablen lenken die Aufmerksamkeit von speziellen Zahlen hin zu einer definierten Menge von Zahlen (oder anderen mathematischen Objekten), definierte Operationen ermöglichen es Variable miteinander zu verknüpfen und so Beziehungen zwischen ihnen darzustellen und schließlich stellt die Algebra ein System von Regeln zur formal-operativen Umformung derartiger Beziehungen zur Verfügung, wodurch weitere Beziehungen sichtbar werden.
Für das Betreiben von Mathematik ebenso wie für die Kommunikation und Reflexion mit und über Mathematik ist ein verständiger Umgang mit grundlegenden Begriffen und Konzepten der Algebra unerlässlich. Dies betrifft insbesondere verschiedene Zahlenbereiche, Variable, Terme, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen sowie Gleichungssysteme. Ein verständiger Umgang umfasst eine angemessene Interpretation dieser Begriffe und Konzepte im jeweiligen Kontext ebenso wie eine zweckmäßige Verwendung dieser Begriffe und Konzepte zur Darstellung abstrakter Sachverhalte und deren regelhafte Umformung. Aber auch Reflexionen über Lösungsmöglichkeiten bzw. -fälle sowie die (Grenzen der) Anwendbarkeit der jeweiligen Konzepte sind in entsprechenden Kommunikationssituationen von Bedeutung.

Die Erweiterung des Zahlbegriffs auf Zahlentupel (Vektoren) und die Festlegung von zweckmäßigen Regeln zur operativen Verknüpfung dieser neuen mathematischen Objekte führt zu einer wichtigen Verallgemeinerung des Zahl- bzw. Variablenbegriffs und zur mehrdimensionalen Algebra.

Durch die Einführung von Koordinaten ist es möglich, Punkte in der Ebene oder im Raum zu verorten, damit geometrische Objekte algebraisch durch Vektoren zu beschreiben und sich so von rein geometrisch-anschaulichen Betrachtungsweisen (mit Winkel, Länge oder Volumen) zu lösen und geometrische Probleme mit Hilfe der Algebra zu behandeln.
Dieser Zusammenhang zwischen Algebra und Geometrie ermöglicht es aber nicht nur, geometrische Sachverhalte mit algebraischen Mitteln darzustellen (zB Vektoren als algebraische Darstellung von Pfeilen oder Punkten) und zu bearbeiten, sondern auch umgekehrt, algebraische Sachverhalte geometrisch zu deuten (zB Zahlentripel als Punkte oder Pfeile im Raum) und daraus neue Einsichten zu gewinnen. Solche Deutungen algebraischer Objekte in der Geometrie wie auch Darstellungen geometrischer Objekte in der Algebra und ein flexibler Wechsel zwischen diesen Darstellungen bzw. Deutungen sind in verschiedensten Kommunikationssituationen – und somit bildungstheoretisch – von großer Bedeutung.

In der Trigonometrie interessieren vor allem Beziehungen im rechtwinkeligen Dreieck, allenfalls Erweiterungen auf allgemeine Dreiecke. Elementare Beziehungen dieser Art sollten gekannt, komplexere geometrische Zusammenhänge auf diese elementaren Beziehungen zurückgeführt werden können.

Grundkompetenzen

Grundbegriffe der Algebra

- Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, über Beziehungen zueinander und über die Darstellung ihrer Elemente verständig einsetzen können
- Wissen über algebraische Begriffe und deren Bedeutung angemessen einsetzen können: Variable, Terme (Grundrechnungsarten, Potenzen), Formeln, (Un-) Gleichungen, Gleichungssysteme, Umformungen, Lösbarkeit, Begriff des Logarithmus (Logarithmus-Symbol)

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

- Terme, Formeln/Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme aufstellen, umformen und im Kontext interpretieren können
- Lineare Gleichungen lösen können
- Quadratische Gleichungen in einer Variablen lösen, Lösungen und Lösungsfälle geometrisch interpretieren können
- Lineare Ungleichungen lösen, Lösungen geometrisch interpretieren können
- Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen lösen, Lösungen und Lösungsfälle geometrisch interpretieren können

Vektoren

- Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext interpretieren können
- Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) interpretieren und verständig einsetzen können
- Definition der Rechenoperationen (Addition, Multiplikation mit Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen (auch geometrisch) deuten können
- Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können
- Den Begriff Normalvektor kennen und (geometrisch) interpretieren können

Trigonometrie

- Definitionen von $sin(\alpha)$, $cos(\alpha)$, $tan(\alpha)$ im rechtwinkeligen Dreieck kennen und einsetzen können
- Rechtwinkelige Dreiecke mithilfe dieser Definitionen auflösen können
- Definitionen von $sin(\alpha)$, $cos(\alpha)$ für $\alpha > 90°$ kennen und einsetzen können

Prototypische Aufgaben – Teil I

Parallele und normale Geraden

Gegeben sei die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellungen (1 Item)

Ermitteln Sie die Gleichung einer zu g parallelen Geraden! Ermitteln Sie die Gleichung einer zu g normalen Geraden!

Quader

Gegeben sei ein Quader mit der Länge a = 3, der Breite b = 4 und der Höhe h = 5.

Aufgabenstellungen (1 Item)

Zeichnen Sie einen solchen Quader in ein Koordinatensystem!
Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte A und E an!
Geben Sie eine Gleichung der Geraden durch die Punkte A und E an!

Warenlager

In einem Warenlager gibt es n Produkte. Die davon jeweils vorhandenen Mengen sind (in entsprechenden Mengeneinheiten) in einer Liste $M = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$ im Computer gespeichert, die zugehörigen Einkaufspreise pro Mengeneinheit in einer Liste $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$.

Aufgabenstellung (1 Item)

Die angegebenen Listen kann man als Vektoren interpretieren.
Was bedeutet im angegebenen Kontext das Skalarprodukt dieser beiden Vektoren?

Schatten

Die Sonnenstrahlen treffen unter einem Winkel von α auf die Erdoberfläche und bewirken, dass ein Kirchturm der Höhe h einen Schatten der Länge s wirft.

Aufgabenstellung (1 Item)

Geben Sie eine Formel an, mit der man bei bekanntem Einfallswinkel α und bekannter Schattenlänge s die Höhe h des Kirchturms ermitteln kann!

Lage von Geraden

Gegeben seien die beiden Geraden g: $3 \cdot x + y = 4$ und h: $a \cdot x + 2 \cdot y = b$.

Aufgabenstellung (1 Item)

Setzen Sie für die beiden Parameter a und b konkrete Zahlen so ein, dass die folgende Aussage richtig ist:

(i)	Für a = ….. und b = ….. gilt:	$g_1 = g_2$
(ii)	Für a = ….. und b = ….. gilt:	g_1 parallel zu g_2, aber $g_1 \neq g_2$
(iii)	Für a = ….. und b = ….. gilt:	g_1 nicht parallel zu g_2
(iv)	Für a = ….. und b = ….. gilt:	g_1 normal zu g_2

Temperatur

In anglikanischen Ländern wird die Temperatur in Grad Fahrenheit angegeben. Die Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit kann durch die Gleichung $°F = 1{,}8 \cdot °C + 32$ angegeben werden.

Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Ermittlen Sie eine Formel zur Umrechnung der Temperatureinheiten von Grad Fahrenheit in Grad Celsius!

b) Wie viel Grad Fahrenheit entsprechen 100° Celsius?

Wasserstand

Der Wasserstand eines Gartenteichs wird durch Verdunstung und Niederschlag reguliert. Im Sommer kann mit einer täglichen Verdunstung von 4 % des am Morgen vorhandenen Wassers gerechnet werden. Der Gartenteich fasst ca. 320 m^3 Wasser.

Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Geben Sie eine Formel an, mit deren Hilfe man ermitteln kann, wie viel Wasser der Teich nach x regenlosen Tagen enthält!

b) Wie lange muss das schöne Wetter dauern, damit nur noch ein Viertel des Wassers vorhanden ist?

Ungleichung

Gegeben sei die Ungleichung $\frac{-1}{x-4} > -\frac{1}{3}$

Aufgabenstellung (1 Item)

Lösen Sie die Ungleichung und veranschaulichen Sie die Lösungsmenge!

Quadratische Gleichung

Gegeben sei die Gleichung $x^2 - 4 \cdot x + k = 0$.

Aufgabenstellung (1 Item)

Für welche Werte von k hat die Gleichung zwei, eine bzw. keine reelle Lösung?

Vektoren

In der unten angeführten Tabelle sind einige Aussagen zu Vektoren angeführt.

Aufgabenstellung (1 Item)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen zutreffend oder nicht zutreffend sind!

	zutreffend	nicht zutreffend
Jedem Punkt der Ebene entspricht genau ein Vektor aus $\mathbb{R}^2$.		
Jedem Pfeil der Ebene entsprechen unendlich viele Vektoren aus $\mathbb{R}^2$.		
Jedem Vektor aus $\mathbb{R}^2$ entspricht genau ein Punkt und genau ein Pfeil der Ebene.		
Es gibt unendlich viele Vektoren aus $\mathbb{R}^2$, denen derselbe Pfeil der Ebene zugeordnet wird.		
Es gibt unendlich viele Pfeile der Ebene, denen derselbe Vektor aus $\mathbb{R}^2$ zugeordnet wird.		
Es gibt einen Punkt und einen Pfeil der Ebene, denen derselbe Vektor aus $\mathbb{R}^2$ zugeordnet wird.		

Prototypische Aufgaben - Teil II

Quadratische Gleichung

Gegeben ist die quadratische Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabenstellung

Beschreiben Sie die möglichen reellen Lösungsfälle in Abhängigkeit von den Parametern a, b, c!

Gleichungssystem

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem in 2 Variablen.

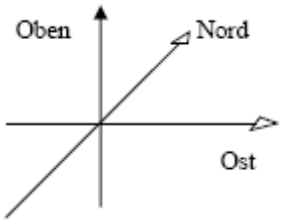
Aufgabenstellungen

a) Beschreiben Sie eine Ihnen bekannte Lösungsmöglichkeit!

b) Welche Lösungsfälle können auftreten? Wie erkennt man diese bei rechnerischer Lösung des Gleichungssystems?

Zwei Flugzeuge

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem im Raum, der Koordinatenursprung liegt im Tower eines Flughafens.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ost \\ Nord \\ Oben \end{pmatrix}$$

Um 8.00 Uhr befindet sich ein Flugzeug der AUA im Punkt A = (-5; -9; 9,6), eine Minute später im Punkt B = (5; 1; 9,6); ein Flugzeug der Lufthansa befindet sich um 8.00 Uhr im Punkt C = (13; 33; 10), eine Minute später im Punkt D = (19; 27; 9,8).
Die Längeneinheit in allen drei Richtungen beträgt 1 km.
Beide Flugzeuge halten die nächsten Minuten Kurs und Geschwindigkeit.

Aufgabenstellungen

a) Wie schnell fliegen die beiden Flugzeuge?

b) Haben die beiden Flugbahnen einen Schnittpunkt? Werden die beiden Flugzeuge kollidieren? Begründen Sie!

Trapez

Gegeben sei die Formel für die Fläche des Trapezes: $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$

Aufgabenstellung

Erläutern Sie, wie man aus der angegebenen Formel Flächenformeln für drei andere bekannte ebene Figuren erhalten kann!

Verkauf

Eine Firma verkauft im Jahr 2009 zwanzig verschiedene Produkte. In der folgenden Tabelle sind die jeweiligen Verkaufszahlen (Absatz in Stück) und die Stückpreise angegeben.

	1. Halbjahr 2009		**2. Halbjahr 2009**	
	Absatz (in Stück)	Stückpreis	Absatz (in Stück)	Stückpreis
Produkt 1	a_1	p_1	b_1	q_1
Produkt 2	a_2	p_2	b_2	q_2
...	...	...	...	...
Produkt 20	a_{20}	p_{20}	b_{20}	q_{20}

Aufgabenstellungen

a) Stellen Sie den Absatz im ersten Halbjahr als Vektor A und jenen im zweiten Halbjahr als Vektor B dar, die Stückpreise entsprechend als Vektoren P bzw. Q! Verwenden Sie diese Vektoren, um damit Formeln für den Erlös E_1 im ersten Halbjahr, für den Erlös E_2 im zweiten Halbjahr sowie für den Jahreserlös E_{09} aufzustellen!

b) Was bedeutet in diesem Kontext $\frac{E_2 - E_1}{E_1}$?

Was bedeutet es in diesem Kontext, wenn man für $\frac{E_2 - E_1}{E_1}$ einen Wert größer als 1 erhält, was bedeutet es, wenn man einen negativen Wert erhält?

c) Für das Jahr 2010 wird (für jedes Produkt) eine Absatzsteigerung von 5% im ersten Halbjahr und von 10% im zweiten Halbjahr erwartet; die Stückpreise sollen gegenüber 2009 nicht verändert werden. Geben Sie eine Formel für den für das Jahr 2010 zu erwartenden Jahreserlös E_{10} an!

Lagebeziehung

Im Schulübungsheft von Thomas findet man folgende Überlegungen bzw. Berechnungen:

Gegeben:

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufstellen von h:

$$h: X = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$g \cap h$:

$$I: \quad 8 + 4 \cdot s = 1 + 3 \cdot t$$

$$II: 3 - 3 \cdot s = 2 + 4 \cdot t$$

$$I: \quad 3 \cdot t - 4 \cdot s = 7$$

$$II: 4 \cdot t + 3 \cdot s = 1$$

$$t = 1$$

$t = 1$ in I:

$$s = -1$$

$$S = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$S = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $P = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$l = \left|\overrightarrow{PS}\right|$$

$$\left|\overrightarrow{PS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{25}$$

$$l = 5$$

Aufgabenstellungen

Was hat Thomas hier berechnet?
Erläutern Sie den Lösungsweg, den Thomas in sein Schulübungsheft geschrieben hat!

Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten

Bildungstheoretische Orientierung

Wenn Expert(inn)en Mathematik verwenden, bedienen sie sich oftmals des Werkzeugs Funktionen.

Für eine verständige *Kommunikation* ist es daher notwendig, mit der spezifischen funktionalen Sichtweise verständig und kompetent umgehen zu können. Das meint, die Aufmerksamkeit auf die Beziehung zwischen zwei (oder mehreren) Größen in unterschiedlichen Kontexten fokussieren zu können wie auch, die gängigen Darstellungsformen zu kennen und mit ihnen flexibel umgehen zu können.

Im Zentrum des mathematischen *Grundwissens* steht dann das Kennen der für die Anwendungen wichtigsten Funktionstypen: Namen und Gleichungen kennen, typische Verläufe von Graphen (er)kennen, zwischen den Darstellungsformen wechseln, charakteristische Eigenschaften wissen und im Kontext deuten.

Insgesamt sind eher kommunikative Handlungen (Darstellen, Interpretieren, Begründen) bedeutsam, manchmal können auch konstruktive Handlungen (Modellbildung) hilfreich sein; mathematisch-operative Handlungen hingegen sind in Kommunikationssituationen von eher geringer Bedeutung.

Darüber hinaus ist *(Reflexions-)Wissen* um Vor- und Nachteile der funktionalen Betrachtung sehr wichtig. Hilfreich ist in diesem Zusammenhang das Wissen über unterschiedliche Typen von Modellen (konstruktive, erklärende, beschreibende).

Wenn die wichtigsten Funktionstypen überblickt werden und wichtige Eigenschaften für das Beschreiben von Funktionen bekannt sind (Monotonie, Monotoniewechsel, Wendepunkte, Periodizität, Nullstellen, Polstellen), ist die Kommunikation auch auf zunächst unbekannte Funktionen bzw. Komposition von Funktionen erweiterbar.

Grundkompetenzen

Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

- Die Begriffe „Funktion“ und „reelle Funktion“ kennen, Beispiele sowie Gegenbeispiele angeben und erklären können
- Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge als Funktionen betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können
- Aus Tabellen, Graphen[1] und Gleichungen (Formeln) Werte(paare) ermitteln können
- Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen und im Kontext deuten können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Polstellen, Periodizität, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Achsen
- Einen Überblick über die wichtigsten Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können
- Formeln als Darstellung von Funktionen interpretieren und den Funktionstyp zuordnen können
- Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten können, Funktionswerte ermitteln können
- Die Verwendung der Funktion als konstruktives Modell (z. B. Tarife, Zinseszinsen), als erklärendes Modell (z. B. Angebot und Nachfrage, Kosten) und als beschreibendes Modell (z. B. als Trendfunktion) erkennen und zwischen diesen Modelltypen unterscheiden können

Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

- Den typischen Verlauf des Graphen kennen
- Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:
  $f(x+1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$
- Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels linearer Funktion bewerten können
- Den Schnittpunkt zweier linearer Funktionsgraphen ermitteln und im jeweiligen Kontext deuten können
- Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

---

[1] Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend, nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$, *oder mit* $f(x) = a \cdot x^{1/2} + b$

- Die typischen Verläufe der Graphen kennen
- Die Wirkung der Parameter a und b kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = a / x$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$]

- Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion kennen
- Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ *mit* $a, b \in R^+$ *bzw.* $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$]

- Die typischen Verläufe der Graphen kennen
- Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^{λ}) kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können
- Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können
- Die Begriffe „Halbwertszeit“ und „Verdoppelungszeit“ kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können
- Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können
- Lineare Funktion und Exponentialfunktion strukturell vergleichen können

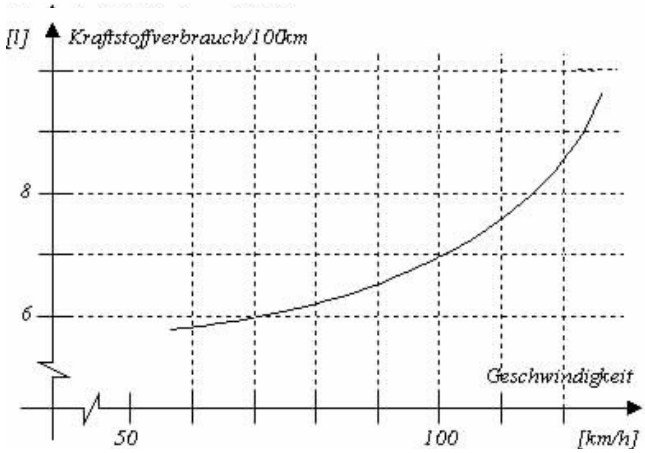
Allgemeine Sinusfunktion [$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$]

- Den typischen Verlauf des Graphen kennen
- Die Wirkung der Parameter a, b und c kennen und die Parameter im Kontext deuten können
- Wissen, dass die Funktion *cos* ein Spezialfall der allgemeinen Sinusfunktion ist und dass gilt: $[\sin(x)]' = \cos(x)$, $[\sin(x)]'' = -\sin(x)$

Prototypische Aufgaben – Teil I

Kraftstoffverbrauch

In der Grafik ist der Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und dem Kraftstoffverbrauch pro 100 km für eine bestimmte Automarke dargestellt, wenn im vierten Gang gefahren wird.



Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Ab welcher Geschwindigkeit beträgt der Kraftstoffverbrauch mehr als 7 l pro 100 km? Wie groß ist der Kraftstoffverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 120 km/h? Um wie viel % Kraftstoff verbraucht man weniger, wenn man auf der Autobahn statt 120 km/h nur 100 km/h fährt?

b) Im fünften Gang wird ab 80 km/h etwa 20% Treibstoff weniger gebraucht. Skizzieren Sie die zugehörige Kurve (ab 80 km/h)!

Lineare Modelle

In der folgenden Tabelle sind konkrete Situationen genannt, in denen mit Funktionen der Form $f(x) = k \cdot x + d$ modelliert wurde.

Aufgabenstellung (1 Item)

Tragen Sie in den entsprechenden Zellen der Tabelle ein, welche Bedeutung k und d dabei jeweils haben:

Anwendung	**Bedeutung von**	
	k	*d*
Tarif-Funktion		
Kosten-Funktion		
Zeit-Ort-Funktion		

Gleichung – Graph

Veränderungen der Parameter einer Funktionsgleichung bewirken Veränderungen des zugehörigen Funktionsgraphen.

Aufgabenstellungen (3 Items)

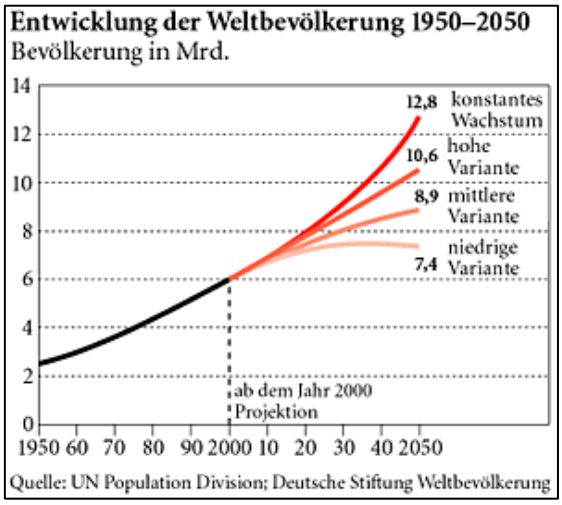
a) Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x + b$, $a > 0$, wenn
   (i) der Wert von a erhöht wird (b bleibt konstant),
   (ii) der Wert von b erhöht wird (a bleibt konstant)?

b) Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$, $a > 0$ und $b > 1$, wenn
   (i) der Wert von a erhöht wird (b bleibt konstant),
   (ii) der Wert von b erhöht wird (a bleibt konstant)?

c) Wie verändert sich der Graph einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b$, $a > 0$, wenn
   (i) der Wert von a erhöht wird (b bleibt konstant),
   (ii) der Wert von b erhöht wird (a bleibt konstant)?

Weltbevölkerung

Die UNO veröffentlicht mehrere Prognosemodelle für die Entwicklung der Weltbevölkerung ab dem Jahr 2000:



Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Bei einer der vier Varianten wurde linear modelliert. Welche Variante ist dies? – Geben Sie die für diese Modellierung zu Grunde liegende jährliche Bevölkerungszunahme an!

b) Die Variante „konstantes Wachstum“ basiert auf der Annahme einer konstanten prozentuellen Zunahme pro Jahr. Wie hoch ist diese? Welcher Funktionstyp beschreibt dieses Wachstum?

Funktionsgraphen zuordnen

Gegeben ist die Formel $r = \frac{2 \cdot s^2 \cdot t}{u}$ für $r, s, t, u > 0$.

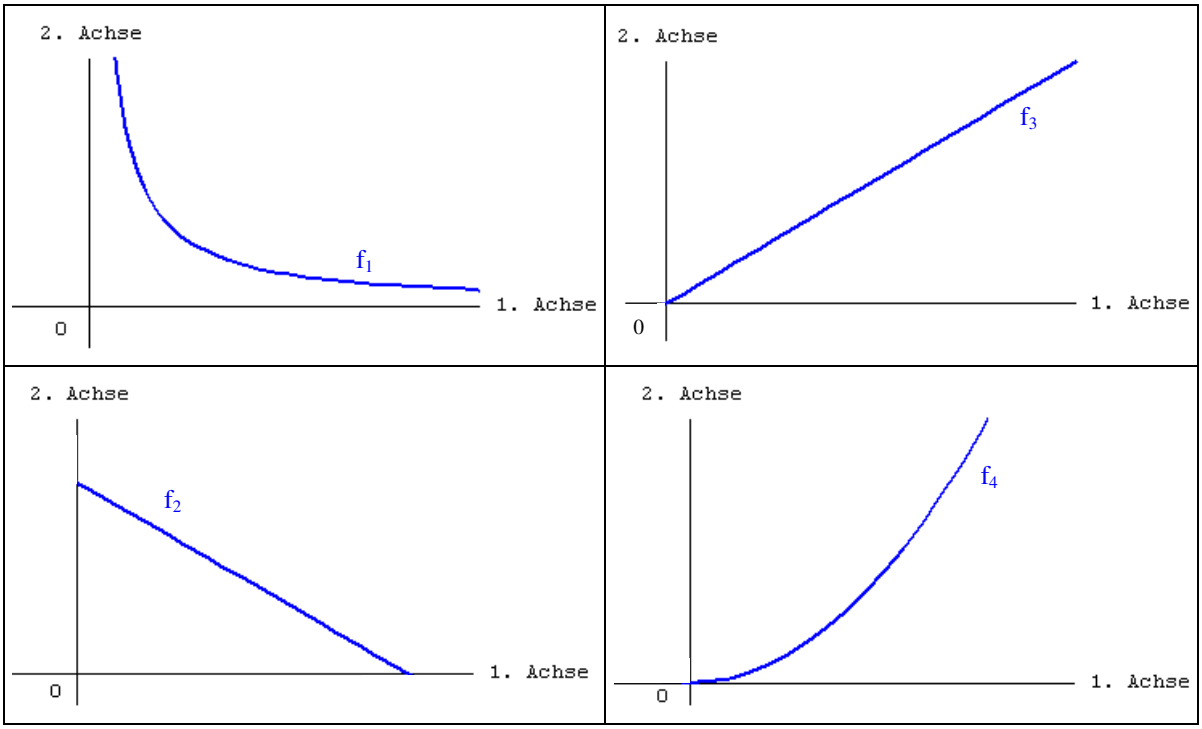
Aufgabenstellung (1 Item)

Welcher der dargestellten Funktionsgraphen könnte welche der drei im Folgenden beschriebenen Funktionen darstellen:

(i) $r = f(s)$, wenn t und u konstant sind

(ii) $r = f(t)$, wenn s und u konstant sind

(iii) $r = f(u)$, wenn s und t konstant sind



Halbwertszeit

Pro Tag zerfallen 5,2% des radioaktiven Isotops Barium-140.
In Physikbüchern wird eine Halbwertszeit von 13 Tagen angegeben.

Aufgabenstellung (1 Item)

Überprüfen Sie, ob die angegebenen Werte zusammenpassen!

Funktionseigenschaften

In der Kopfzeile der unten angegebenen Tabelle sind die Gleichungen verschiedener Funktionen angegeben. In der linken Spalte sind Eigenschaften von Funktionen angeführt, die den angegebenen Funktionen zuzuordnen sind.

Aufgabenstellungen (3 Items)

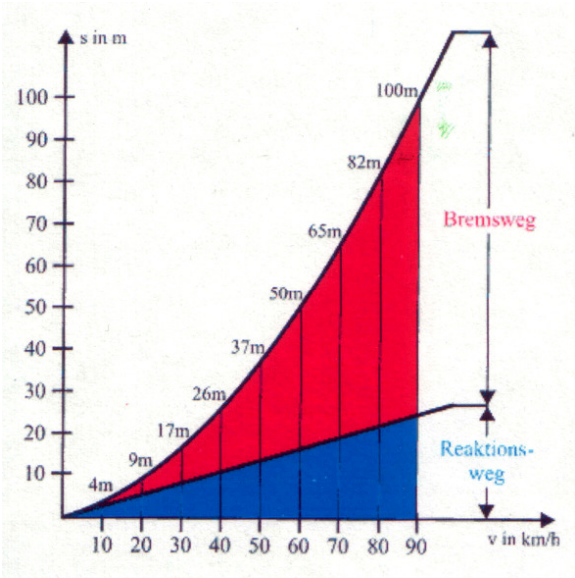
Fügen Sie in jeder Zelle der Tabelle ein „ja“ ein, wenn die Funktion diese Eigenschaft hat, andernfalls fügen Sie ein „nein“ ein!

	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^3$	$f(x) = x^{-2}$	$f(x) = x^{-3}$	$f(x) = e^x$	$f(x) = \sin(x)$
monoton fallend für $x > 0$						
monoton steigend für $x > 0$						
periodisch						
alle Funktionswerte ≥ 0 (im größtmöglichen Definitionsbereich)						

Prototypische Aufgaben – Teil II

Anhalteweg

In der Fahrschule lernt man, dass sich der Anhalteweg als Summe von Reaktionsweg und Bremsweg darstellen lässt. Dabei wird der Reaktionsweg durch eine lineare Funktion, der Bremsweg durch eine quadratische Funktion modelliert.
In nebenstehender Grafik ist die Modellierung veranschaulicht.



Aufgabenstellung

Finden Sie eine Gleichung, aus der man die in der Grafik angegebenen Werte für den Anhalteweg erhält!

Typen von Funktionen

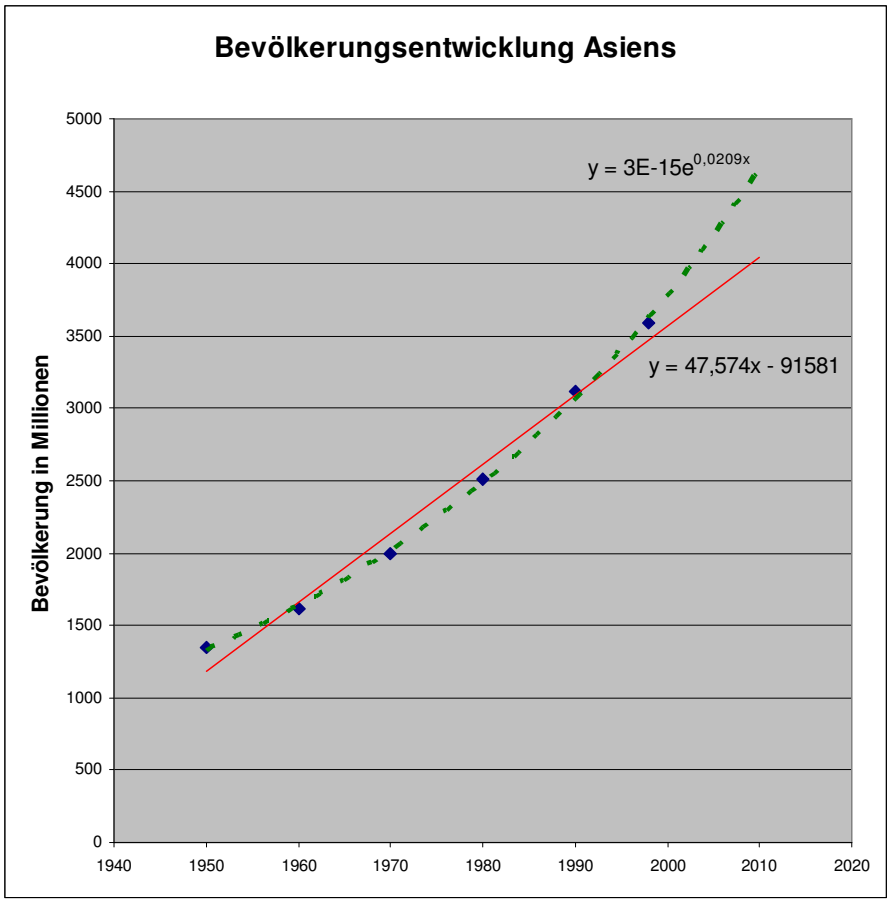
Lineare Funktionen, Exponential- und Logarithmusfunktionen, Potenz- und Polynomfunktionen und Winkelfunktionen sind wichtige Typen von Funktionen.

Aufgabenstellung

Erläutern Sie, was man unter einer „Funktion“ versteht! – Fertigen Sie eine Übersicht an, in der Gleichungen, typische Graphen und charakteristische Eigenschaften dieser Typen von Funktionen vergleichend gegenübergestellt werden!

Asien

Die folgende EXCEL-Grafik zeigt die Bevölkerungsentwicklung Asiens sowie die Gleichung und den Graph einer linearen bzw. exponentiellen Trendfunktion.
Hinweis: Trendfunktionen sind Funktionen, die den Verlauf (hier die Bevölkerungsentwicklung) näherungsweise beschreiben.



Aufgabenstellungen

a) Welche Bedeutung hat in der angegebenen linearen Gleichung die Zahl 47,574?
Wie interpretieren Sie die in der linearen Gleichung angegebene Zahl -91581?

b) Wenn man bei der Ermittlung des Trends nur die Bevölkerungszahlen für 1990 und 1998 berücksichtigen möchte, wird man eine Gerade durch die beiden entsprechenden Punkte legen. Geben Sie eine Gleichung dieser Trendgeraden an! Zeichnen Sie diese Gerade in der obigen Grafik ein und lesen Sie aus der Grafik ab, um wie viel sich der damit ermittelte Prognosewert für das Jahr 2010 von jenem unterscheidet, den man mit der von EXCEL ermittelten Trendgeraden erhält!

c) Wie interpretieren Sie die in der exponentiellen Gleichung angegebene Zahl 0,0209?
Der Wert „3E-15“ ist gerundet. Geben Sie ihn genauer an unter der Annahme, dass der Bevölkerungswert im Jahr 1970 genau 2000 (Millionen) betragen hat!

Fixkosten

Der folgende Text wurde einem „Handbuch zur Wirtschaftskunde“[1] entnommen.

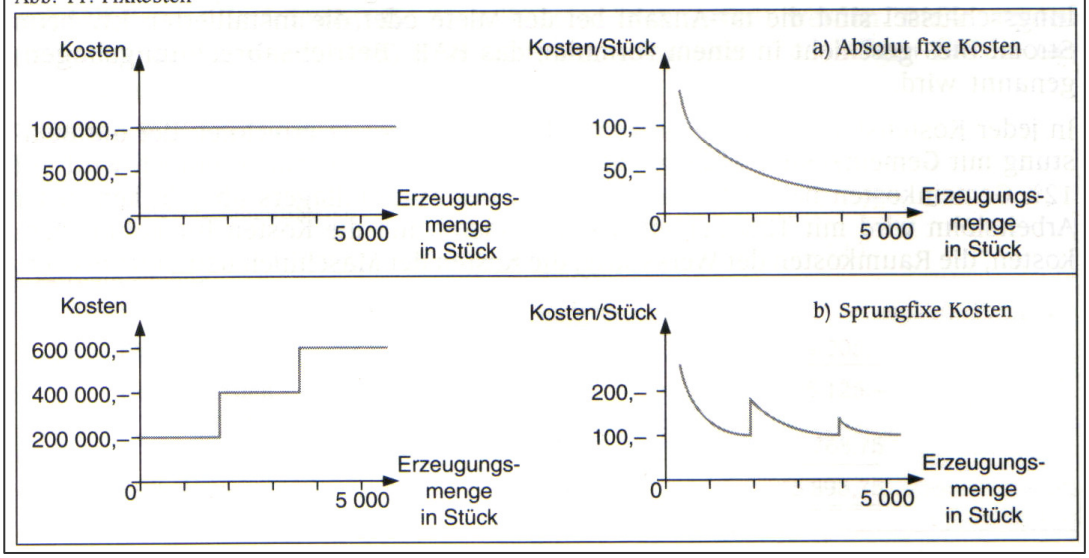
Fixkosten sind unabhängig vom Beschäftigungsgrad. Sie fallen in gleichem Ausmaß an, ob nun mehr oder weniger produziert wird.

a) Absolut fixe Kosten verändern sich auch bei großen Beschäftigungsschwankungen nicht. Beispiele: Grundsteuer für das Betriebsgrundstück, Personalkosten für den Portier, Kosten der Beheizung.

b) Sprungfixe Kosten steigen plötzlich an, wenn ein bestimmtes Limit überschritten wird. Beispiele: Kosten für eine zusätzliche Maschine, wenn die Kapazität der bisherigen nicht mehr ausreicht. Kosten für eine weitere Sekretärin, wenn die bisherige durch die zahlreichen Kundenanfragen überlastet ist.

Die Stückkosten sind bei steigender Erzeugungsmenge fallend, was man Fixkostendegression nennt. Je größer die Erzeugungsmenge ist, desto geringer ist der Anteil der Fixkosten, den das einzelne Produkt zu tragen hat; es wird sozusagen immer „billiger“. Bei fallender Produktion ergibt sich die gegenteilige Wirkung, die sogenannte **Fixkostenprogression**. Das einzelne Produkt hat in diesem Fall einen größeren Anteil der Fixkosten zu tragen und wird somit „teurer“, d.h. es verursacht höhere Kosten. Beispiel: Fixkosten 800 000,– S. Bei 5 000 Stück 160,– S pro Stück, bei 8 000 Stück 100,– S pro Stück, bei 4 000 Stück 200,– S pro Stück.[2])

Abb. 11: Fixkosten



Aufgabenstellungen

Im vorliegenden Text wird der Verlauf der Stückkostenkurve für den Fall der absolut fixen Kosten ausführlich erklärt, für den Fall der sprungfixen Kosten nicht.
Schreiben Sie einen Text, der den Verlauf der Stückkostenkurve für den Fall der sprungfixen Kosten ähnlich ausführlich erklärt!
Erklären Sie, warum die „Sprünge“ in der Stückkostenkurve bei höheren Erzeugungsmengen in der Regel immer kleiner werden!

---

1 Malcik, W. (Hrsg.) (1997): *Wirtschaftskunde Österreichs*. Handbuch zur Wirtschaftskunde, Teil 3, 2. Auflage. Ed. Hölzel, Wien, S. 35.

2 Das „S“ steht für Schilling – heute würde man in Euro argumentieren.

Inhaltsbereich Analysis

Bildungstheoretische Orientierung

Die Analysis stellt Konzepte zur formalen, kalkulatorischen Beschreibung von diskretem und stetigem Änderungsverhalten bereit, die nicht nur in der Mathematik, sondern auch in vielen Anwendungsbereichen von grundlegender Bedeutung sind. Die Begriffe Differenzenquotient bzw. Differentialquotient sind allgemeine mathematische Mittel, dieses Änderungsverhalten von Größen in unterschiedlichen Kontexten quantitativ zu beschreiben, was in vielen Sachbereichen auch zur Bildung neuer Begriffe genutzt wird.

Im Sinne der Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en wird es daher wichtig sein, diese mathematischen Begriffe in diversen Anwendungsfällen deuten zu können, darüber hinaus aber auch allfällige Zusammenhänge von Fachbegriffen auf der Basis der hier genannten mathematischen Konzepte zu erkennen (zB den Zusammenhang Ladung – Stromstärke in der Physik oder allgemein den Zusammenhang von Bestands- und Flussgrößen). Im Rahmen von höherer Allgemeinbildung sollte die Analysis somit einen wesentlichen Beitrag zu einem verständigen Umgang mit den entsprechenden Fachbegriffen leisten, der sich nicht nur auf die Kommunikation mit Expert(inn)en beschränkt. Manche der hier angesprochenen Begriffe werden auch umgangssprachlich gebraucht (zB Momentangeschwindigkeit, Beschleunigung, Zerfallsgeschwindigkeit, progressives Wachstum). Im Sinne einer Kommunikation mit der Allgemeinheit ist es für einen allgemeingebildeten Menschen daher auch wichtig, bei einer allfälligen Explikation der Fachbegriffe auf deren mathematischen Kern zurückgreifen zu können. (Was bedeutet eine „momentane“ Änderung einer bestimmten Größe?)

Der hinsichtlich der Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en zentrale Begriff der Integralrechnung ist das bestimmte Integral. Es ist wichtig zu wissen, was das dahinter stehende Konzept allgemein in der Mathematik und konkret in diversen Anwendungssituationen leistet. Daraus ergibt sich einerseits, dass man das bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe von Produkten in verschiedenen Kontexten deuten kann, andererseits aber auch, dass man die typischen Anwendungsfälle des bestimmten Integrals allgemein beschreiben und den Begriff selbst in verschiedenen Kontexten zur Darstellung entsprechender Zusammenhänge verwenden kann (zB die physikalische Arbeit als Wegintegral der Kraft).

Die mathematische Darstellung der einzelnen Begriffe ist im Allgemeinen eine symbolische, wobei die Zeichen auch eine bestimmte Bedeutung innerhalb des Kalküls haben. Für die Zugänglichkeit elementarer Fachliteratur ist ein verständiger Umgang mit diesem Formalismus notwendig, d. h., die zum Teil unterschiedlichen symbolischen Darstellungen des Differentialquotienten, der Ableitungsfunktion sowie des bestimmten Integrals sollten als solche erkannt, im jeweiligen Kontext gedeutet und auch eigenständig als Darstellungsmittel eingesetzt werden können. Man soll wissen, dass mit Zeichen auch gerechnet wird und was im konkreten Fall damit berechnet wird; die Durchführung der Rechnung selbst kann aber weitgehend den Expert(inn)en, zB Computern, überlassen bleiben. Es genügt, sich auf die einfachsten Regeln des Differenzierens zu beschränken, zumal neben der symbolischen Darstellung der Begriffe auch die graphische Darstellung der entsprechenden Funktionen zur Verfügung steht, an denen die relevanten Eigenschaften und Zusammenhänge erkannt und auch quantitativ abgeschätzt werden können.

Grundkompetenzen

Änderungsmaße

- Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können
- Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient („momentane“ Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes kennen und damit (verbal und auch in formaler Schreibweise) beschreiben können
- Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können
- Das systemdynamische Verhalten von Größen durch Differenzengleichungen beschreiben bzw. diese im Kontext deuten können

Regeln für das Differenzieren

- Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$

Ableitungsfunktion / Stammfunktion

- Den Begriff Ableitungsfunktion / Stammfunktion kennen
- Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können
- Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

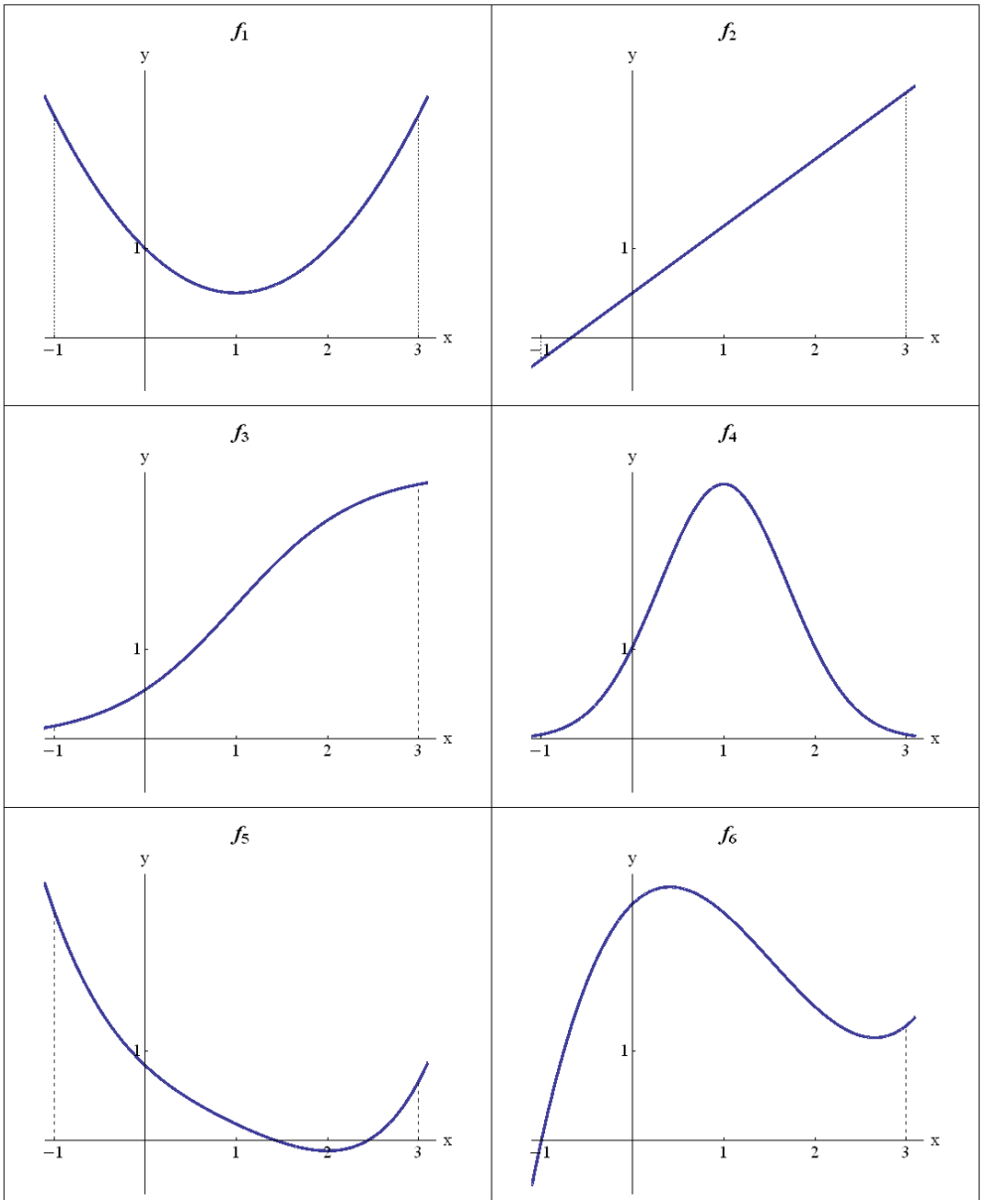
Summation und Integral

- Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können
- Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Prototypische Aufgaben – Teil I

Eigenschaften von Funktionen

In der Abbildung sind die Graphen von sechs Funktionen dargestellt.



Aufgabenstellung (1 Item)

Welche der dargestellten Funktionen haben folgende Eigenschaft?

E_1: $f'(x) > 0$ für alle x aus dem Intervall [-1; 3]

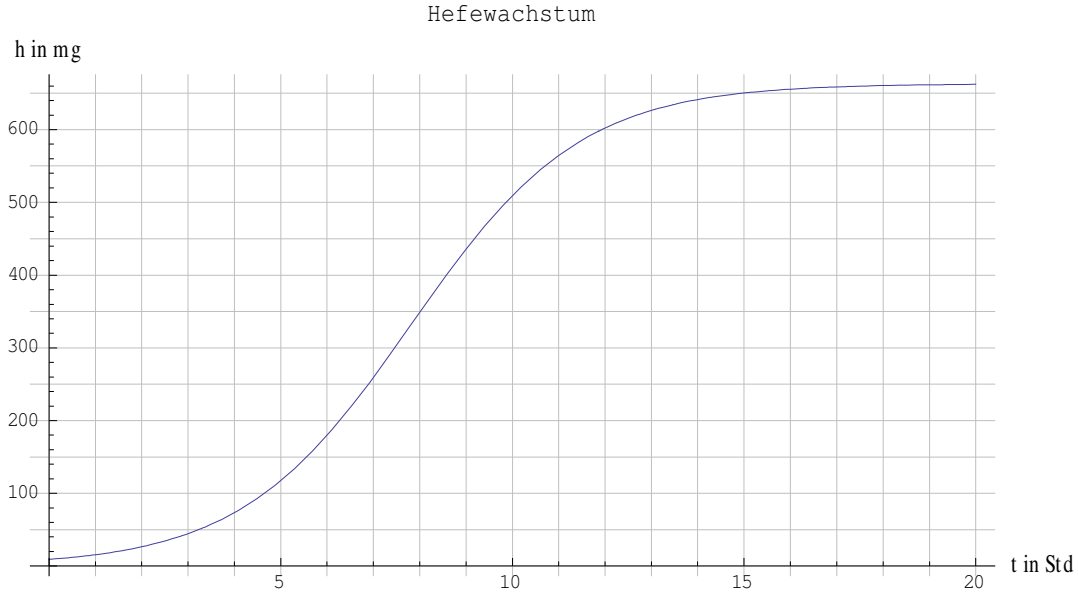
E_2: $f'(0) > 0$

E_3: f hat mindestens eine lokale Extremstelle im Intervall [-1; 3]

E_4: $f''(x) > 0$ für alle x aus dem Intervall [-1; 3]

Hefewachstum

In der Grafik ist das Wachstum einer Hefekultur dargestellt (Zeitangaben in Stunden; Hefemenge in mg).



Aufgabenstellungen (3 Items)

a) Schätzen Sie die ungefähre Lage des Wendepunktes ab und zeichnen Sie ihn in der Grafik ein!

b) Schätzen Sie ab, wie groß die Wachstumsgeschwindigkeit an der Wendestelle ist!

c) Deuten Sie den Wendepunkt im Hinblick auf die Wachstumsgeschwindigkeit!

Bewegung

Die Bewegung eines Körpers werde durch die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = 36 - t^2$ beschrieben.

Aufgabenstellungen (3 Items)

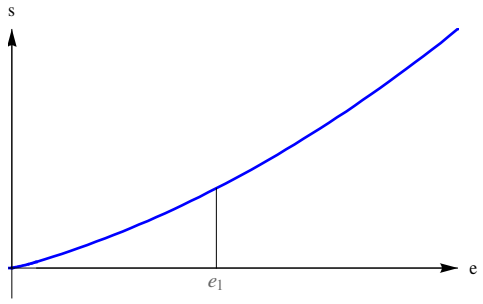
a) Stellen Sie die Funktion v für $0 \le t \le 6$ graphisch dar und beschreiben Sie für dieses Zeitintervall die Bewegung!

b) Wie groß ist die mittlere Änderungsrate der Geschwindigkeit im Intervall [2; 5]? Berechnen Sie $v'(4)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Kontext!

c) Stellen Sie den Weg des Körpers in den ersten sechs Sekunden durch ein Integral dar!

Einkommenssteuer (nach R. Fischer und G. Malle[1])

Es sei $s: e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet; e_1 sei dabei ein bestimmtes Einkommen (siehe Grafik).



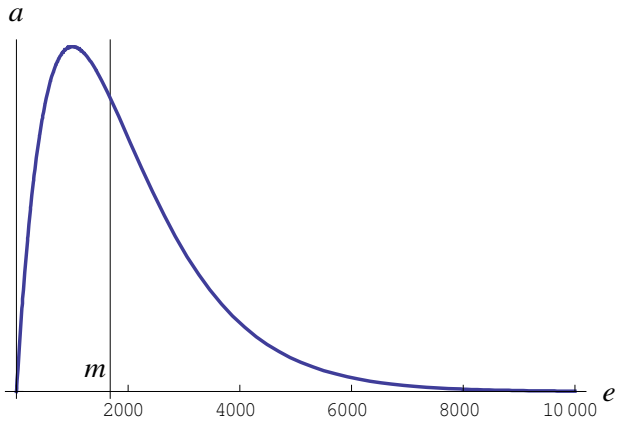
Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Interpretieren Sie die Terme T_1: $e_1 - s(e_1)$ und T_2: $\dfrac{s(e_1)}{e_1}$!

b) *s'(e)* wird als Grenzsteuersatz bezeichnet. Erklären Sie diesen Begriff!

Einkommensverteilung (nach R. Fischer und G. Malle[1])

Die Anzahl der erwachsenen Menschen einer bestimmten Region mit dem monatlichen Einkommen e werde durch die stetige Funktion $a: e \mapsto a(e)$ modelliert (Verlauf des Graphen siehe Abbildung), das höchste Einkommen sei € 10.000,-.



Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Was bedeutet $\int_0^{10000} a(e)\,de$?

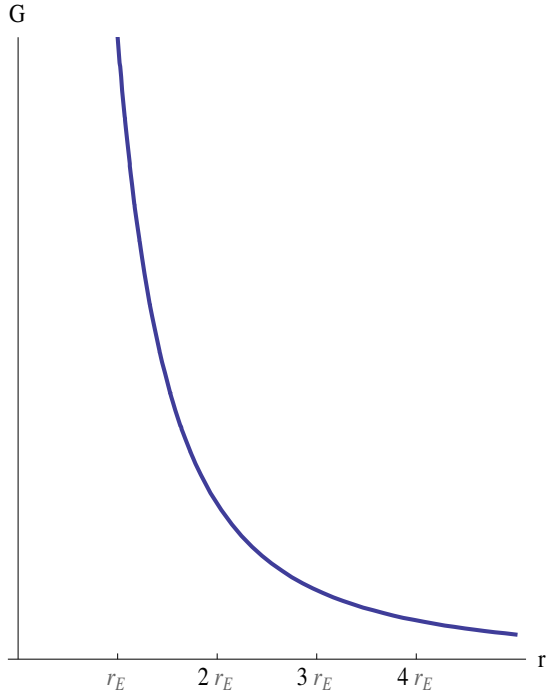
b) Stellen Sie durch ein entsprechendes Integral dar, wie viele Menschen dieser Region monatlich mehr als € 4.000,- verdienen!

---

[1] Fischer, R. und Malle, G. (2004): *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 5. Profil, München-Wien, S. 251.

Satellit

Die physikalische Arbeit W, die man zum Heben eines Körpers um eine bestimmte Strecke s benötigt, wird durch das Produkt aus dieser Strecke s und der Gewichtskraft G berechnet.
Bei größeren Höhen ist die Abnahme der Gewichtskraft G mit der Entfernung r vom Erdmittelpunkt zu berücksichtigen (Die Grafik zeigt den Verlauf von G für $r > r_E$, wobei r_E der Erdradius ist.)



Aufgabenstellung (1 Item)

Stellen Sie jene Arbeit W, die notwendig ist, einen Satelliten von der Erdoberfläche aus in den Abstand $d = 3\,r_E$ vom Erdmittelpunkt zu bringen, durch eine entsprechende Formel dar und kennzeichnen Sie diese Arbeit W in der Grafik!

Prototypische Aufgaben – Teil II

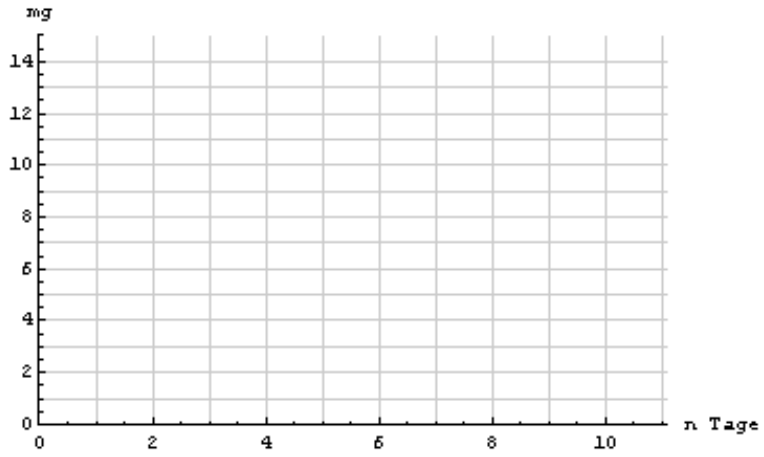
Medikamentenkur

Einem Patienten wird täglich über eine Infusion 4 mg eines Wirkstoffes verabreicht. Während 24 Stunden werden 40% dieser Substanz im Blut abgebaut. Es sei x_n die Menge des Wirkstoffes im Blut des Patienten am Tag n der Medikamentenkur, gemessen jeweils nach Verabreichung der Infusion. Man kann davon ausgehen, dass der Patient vor der Kur nichts von diesem Wirkstoff im Blut hatte.

Aufgabenstellungen

a) Beschreiben Sie den Verlauf von x_n während der Medikamentenkur durch eine entsprechende Differenzengleichung!

b) Stellen Sie den Verlauf von x_n während der Medikamentenkur graphisch dar. Tragen Sie dazu die entsprechenden Werte in das Diagramm ein!

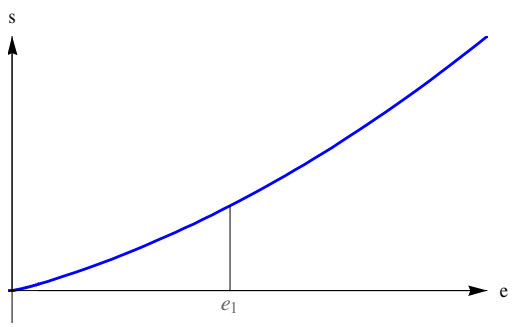


c) Begründen Sie, warum die Menge x_n den Wert von 10 *mg* nicht übersteigt!

d) Interpretieren Sie die beiden Terme T_1: $x_n - x_{n-1}$ bzw. T_2: $\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}}$ im Kontext!

Einkommenssteuer (nach R. Fischer und G. Malle[1])

Es sei $s: e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer s zuordnet (siehe Grafik). e_1 sei ein bestimmtes Einkommen, und Δe jener Betrag, um den sich das Einkommen im Zuge einer Gehaltserhöhung vergrößert.



Aufgabenstellungen

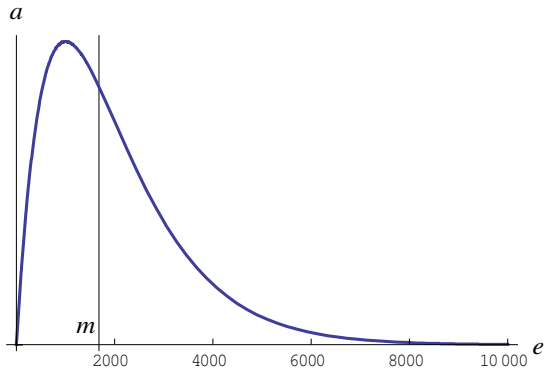
a) Interpretieren Sie den Ausdruck $\dfrac{s(e_1+\Delta e)-s(e_1)}{\Delta e}$ im gegebenen Kontext!

b) Interpretieren Sie die Ungleichung $\dfrac{s(e_1+\Delta e)-s(e_1)}{\Delta e} > \dfrac{s(e_1)}{e_1}$ im gegebenen Kontext!

c) In den meisten Steuersystemen gilt für Einkommen über einer bestimmten Einkommensgrenze: $s''(e)=0$. Was bedeutet das?

Einkommensverteilung (nach R. Fischer und G. Malle[1])

Die Anzahl der erwachsenen Menschen einer bestimmten Region mit dem monatlichen Einkommen e werde durch die stetige Funktion $a: e \mapsto a(e)$ modelliert (Verlauf des Graphen siehe Abbildung), das höchste Einkommen sei € 10.000,-.



Aufgabenstellungen

a) Interpretieren Sie die Gleichung $\int_0^m a(e)de = \frac{1}{2}\int_0^{10000} a(e)de$ im vorliegenden Kontext!

b) Was wird mit dem Integral $\int_{2000}^{4000} e \cdot a(e)de$ berechnet?

c) Stellen Sie durch ein entsprechendes Integral dar, wie groß das gesamte monatliche Einkommen jener Bevölkerungsgruppe ist, die mehr al 4000 Euro verdient!

---

[1] Fischer, R. und Malle, G. (2004): *Mensch und Mathematik. Eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln*. Klagenfurter Beiträge zur Didaktik der Mathematik, Bd. 5. Profil, München-Wien, S. 251.

Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik

Bildungstheoretische Orientierung

Mathematiker(innen) wie auch Anwender(innen) bedienen sich häufig der Begriffe, der Darstellungsformen und der (grundlegenden) Verfahren der Beschreibenden Statistik, der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Schließenden Statistik. Für den allgemeingebildeten Laien und die allgemeingebildete Laiin wird es im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit vor allem darauf ankommen, die stochastischen Begriffe und Darstellungen im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren und deren Aussagekraft bzw. Angemessenheit einschätzen und bewerten zu können.

Die eigenständige Erstellung von statistischen Tabellen und Grafiken wird sich auf Situationen geringer Komplexität und auf einfache Grafiken beschränken (zB bei der Kommunikation mit der Allgemeinheit), für die Ermittlung statistischer Kennzahlen (Zentral- und Streuungsmaße) gilt Ähnliches.

Auch bei der Wahrscheinlichkeit kann man sich auf grundlegende Wahrscheinlichkeitsinterpretationen, auf grundlegende Begriffe (Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung, Dichte- und Verteilungsfunktion, Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung) und Konzepte (Binomialverteilung, Normalverteilung) sowie einfachste Wahrscheinlichkeitsberechnungen beschränken; wichtig hingegen erscheint es, Wahrscheinlichkeit als eine (vom jeweiligen Informationsstand) abhängige Modellierung und Quantifizierung des Zufalls sowie als unverzichtbares Bindeglied zwischen den beiden Statistiken zu verstehen.
Der Begriff der (Zufalls-)Stichprobe ist bereits bei der Wahrscheinlichkeit, aber natürlich auch in der Schließenden Statistik grundlegend und zentral.

Von den zwei grundlegenden Konzepten der Schließenden Statistik, dem Testen von Hypothesen und der Hochrechnung (Konfidenzintervall), ist die Hochrechnung praktisch von besonderer Bedeutung. Im Hinblick auf die Kommunikationsfähigkeit wird es auch hier weniger darum gehen, Konfidenzintervalle zu ermitteln, sondern vorrangig darum, Ergebnisse dieses Verfahrens im jeweiligen Kontext angemessen zu deuten und zu bewerten. Dabei spielen Begriffe wie Sicherheit/Irrtumswahrscheinlichkeit und deren Zusammenhang mit der Intervallbreite („Genauigkeit“) und dem Stichprobenumfang eine zentrale Rolle, sodass entsprechende Kompetenzen unverzichtbar sind.

Grundkompetenzen

Beschreibende Statistik

- Werte aus tabellarischen und elementaren grafischen Darstellungen (Stab-. Kreis-, Linien-, Streudiagramm, Prozentstreifen, Kastenschaubild) ablesen (bzw. zusammengesetzte Werte ermitteln) und im jeweiligen Kontext angemessen interpretieren können
- Tabellen und einfache statistische Grafiken erstellen, zwischen Darstellungsformen wechseln können
- Stärken, Schwächen und Manipulationsmöglichkeiten statistischer Grafiken nennen und in Anwendungen berücksichtigen können
- Statistische Kennzahlen (absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus; Quartile, Perzentile; Spannweite, Quartilabstand und empirische Varianz/Standardabweichung) im jeweiligen Kontext angemessen deuten können; die angeführten Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln können; wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels, des Median und der Quartilen angeben und nutzen, die Entscheidung für die Verwendung einer bestimmten Kennzahl begründen können

Wahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeit als Instrument zur Modellierung des Zufalls angemessen verwenden bzw. deuten können; Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil und als relative Häufigkeit in einer Versuchsserie anwenden und interpretieren können
- Begriff und Schreibweise bedingter Wahrscheinlichkeiten kennen und interpretieren können; bedingte Wahrscheinlichkeiten sowie Additions- und Multiplikationsregel intuitiv anwenden können
- Begriff und Zweck von Stichproben sowie die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten (empirisches Gesetz der großen Zahlen) in ihrer für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Schließenden Statistik grundlegenden Bedeutung erklären können
- Die Gleichungskette

  relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einer Stichprobe ≈ Wahrscheinlichkeit von E = relativer Anteil einer Teilmenge A in der Grundgesamtheit

  interpretieren können und als Grundidee der Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. der Schließenden Statistik erklären können
- Die Begriffe Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung (binomialverteilter Zufallsgrößen), Dichte- und Verteilungsfunktion (normalverteilter Zufallsgrößen), Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung in Kommunikationssituationen verständig deuten bzw. einsetzen können, Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können

- Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung bzw. mit Normalverteilung modelliert werden kann
- Symmetrische Intervalle um den Erwartungswert („Schätzbereiche“ für Zufallsvariable) als wichtiges Mittel zur Beschreibung des Verhaltens von Stichproben kennen; Schätzbereiche für relative Häufigkeiten (bei Modellierung mit Binomial- oder Normalverteilung) ermitteln können, den Zusammenhang zwischen Stichprobengröße, Intervallbreite und Sicherheit allgemein beschreiben und in konkreten Situationen erläutern können

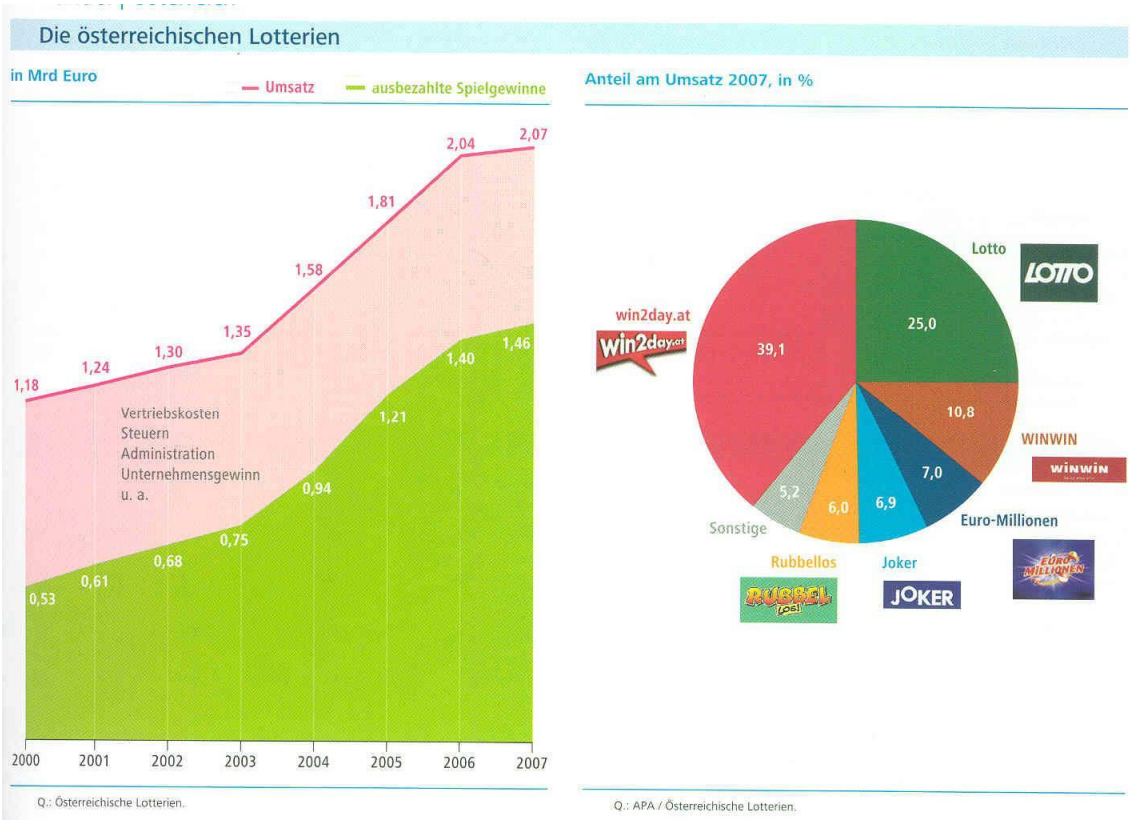
Schließende Statistik

- Konfidenzintervalle im jeweiligen Kontext interpretieren können; Zusammenhang zwischen Sicherheit und Intervallbreite kennen und bei der Modellierung angemessen berücksichtigen können; Formel(n) für die Stichprobengröße interpretieren (Zusammenhang mit Sicherheit, Intervallbreite und Stichprobenparameter) und erforderliche Stichprobengröße daraus ermitteln können; Konfidenzintervalle für relative Anteile in der Grundgesamtheit ermitteln können

Prototypische Aufgaben – Teil I

Lotterien

Die folgenden Grafiken zeigen die Umsätze bzw. die ausbezahlten Spielgewinne österreichischer Lotterien in den Jahren 2000-2007 sowie den Anteil der einzelnen Lotterien am Umsatz des Jahres 2007.



Quelle: Österreichs Wirtschaft im Überblick

Aufgabenstellungen (4 Items)

a) Wie hoch war der Umsatz (in €) der österreichischen Lotterien im Jahr 2000?
In welchem Jahr überschritten die ausbezahlten Spielgewinne erstmals die Milliardengrenze (in €)?

b) In welchem Jahr stiegen die ausbezahlten Spielgewinne gegenüber dem Vorjahr am stärksten (d. h., um den größten Betrag)?
In welchem Jahr war die prozentuelle Umsatzsteigerung gegenüber dem Vorjahr am höchsten?

c) Welcher Umsatz (in €) wurde von *win2day.at* im Jahre 2007 erzielt?

d) Der Anstieg der Spielgewinne erscheint in der Grafik recht steil. Zeichnen Sie mit den vorliegenden Daten ein Liniendiagramm, in dem der Anstieg der Spielgewinne deutlich flacher erscheint.

Jahreseinkommen von Arbeiterinnen und Arbeitern

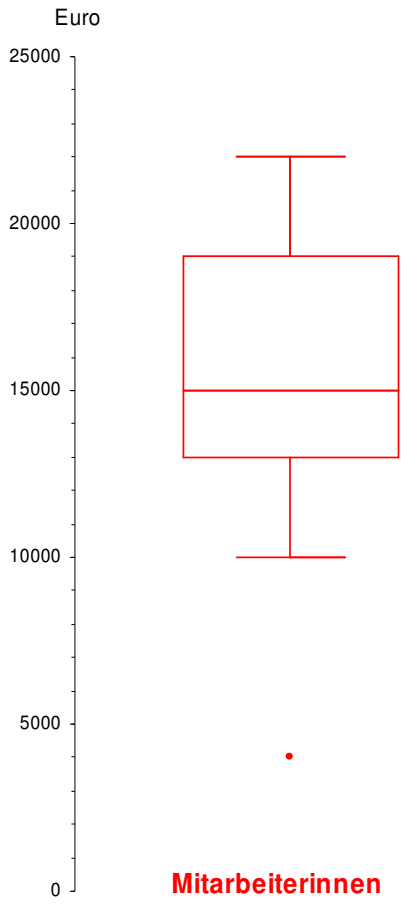
Im Jahre 2007 betrug das arithmetische Mittel der Netto-Jahreseinkommen der 529.157 österreichischen Arbeiterinnen € 8.837.-, jenes der 987.442 österreichischen Arbeiter € 15.638,-.

Aufgabenstellung (1 Item)

Ermitteln Sie das arithmetische Mittel der Netto-Jahreseinkommen aller 1,516.599 österreichischen Arbeiter(innen)!

Einkommen von Mitarbeiterinnen eines Unternehmens

Im folgenden Kastenschaubild wird die Verteilung der Netto-Jahreseinkommen der 15 Mitarbeiterinnen eines Unternehmens veranschaulicht.



Aufgabenstellungen (2 Items)

a) Formulieren Sie anhand des Kastenschaubilds mindestens drei konkrete Aussagen über die (Verteilung der) Netto-Jahreseinkommen der 15 Mitarbeiterinnen!

b) Das arithmetische Mittel der 15 Netto-Jahreseinkommen beträgt € 15.200,-. Wie hoch ist das arithmetische Mittel, wenn man den Ausreißer nicht mitrechnet?

Schneefälle

Ein Meteorologe meint, die Wahrscheinlichkeit, dass es im Land Salzburg im März schneit, sei 70%.

Aufgabenstellung (1 Item)

Kreuzen Sie an, welche der folgenden Aussagen die Bedeutung der Aussage des Meteorologen am besten wiedergibt! (Nur eine Aussage ankreuzen!)

- Im März schneit es in 70% aller Salzburger Gemeinden. ☐
- Die Wahrscheinlichkeit von 70 % ist größer als ½, daher schneit es im Land Salzburg im März sicher jedes Jahr. ☐
- Im Land Salzburg schneit es an 70 % aller Märztage. ☐
- Man hat über viele Jahre für das Land Salzburg Aufzeichnungen gemacht, aus denen hervorgeht, dass es in ca. 70 % aller Jahre im März Schneefall gab. ☐
- Es ist sicher, dass es in Salzburg in 7 der kommenden 10 Jahre im März schneien wird. ☐
- Im Land Salzburg gibt es 70 % aller Schneefälle im März. ☐

Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Das empirische Gesetz der großen Zahlen (eGgZ) ist eine wesentliche Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Schließenden Statistik.

Aufgabenstellung (1 Item)

Kreuzen Sie an, ob die folgenden Aussagen zutreffend oder nicht zutreffend sind:

	trifft zu	trifft nicht zu
Das eGgZ besagt, dass die relativen Häufigkeiten für das Eintreten eines Ereignisses mit jeder Erhöhung der Versuchsanzahl immer näher an einen bestimmten Wert (= Grenzwert der relativen Häufigkeiten) heranrücken.	☐	☐
Das eGgZ besagt, dass große Schwankungen der relativen Häufigkeiten für das Eintreten eines Ereignisses mit zunehmender Versuchsanzahl immer seltener („unwahrscheinlicher“) werden.	☐	☐
Das eGgZ ist Grundlage für die Interpretation der Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil in der Grundgesamtheit.	☐	☐
Das eGgZ ist Grundlage für die Interpretation der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit in einer Versuchsserie.	☐	☐

Anteil an Maturantinnen und Maturanten

Eine Statistikerin hat Daten zum Bildungsstand zufällig ausgewählter Österreicherinnen und Österreicher (im Alter von 19 Jahren und darüber) erhoben und für den Anteil jener Österreicher(innen), deren höchster Bildungsabschluss die Matura darstellt, das 95%-Konfidenzintervall [0,234; 0,290] ermittelt.

Aufgabenstellung (1 Item)

Welche Information liefert dieses Konfidenzintervall?

Stichprobengröße

Mit Hilfe einer Zufallsstichprobe soll ermittelt werden, wie viele Wiener Jugendliche im Alter von 18 Jahren täglich Alkohol konsumieren. Das Ergebnis soll mit einer Genauigkeit von ±2% und einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% angegeben werden.
Eine Statistikerin berechnet, dass dafür ca. 2400 zufällig ausgewählte Wiener Jugendliche befragt werden müssen.

Aufgabenstellung (1 Item)

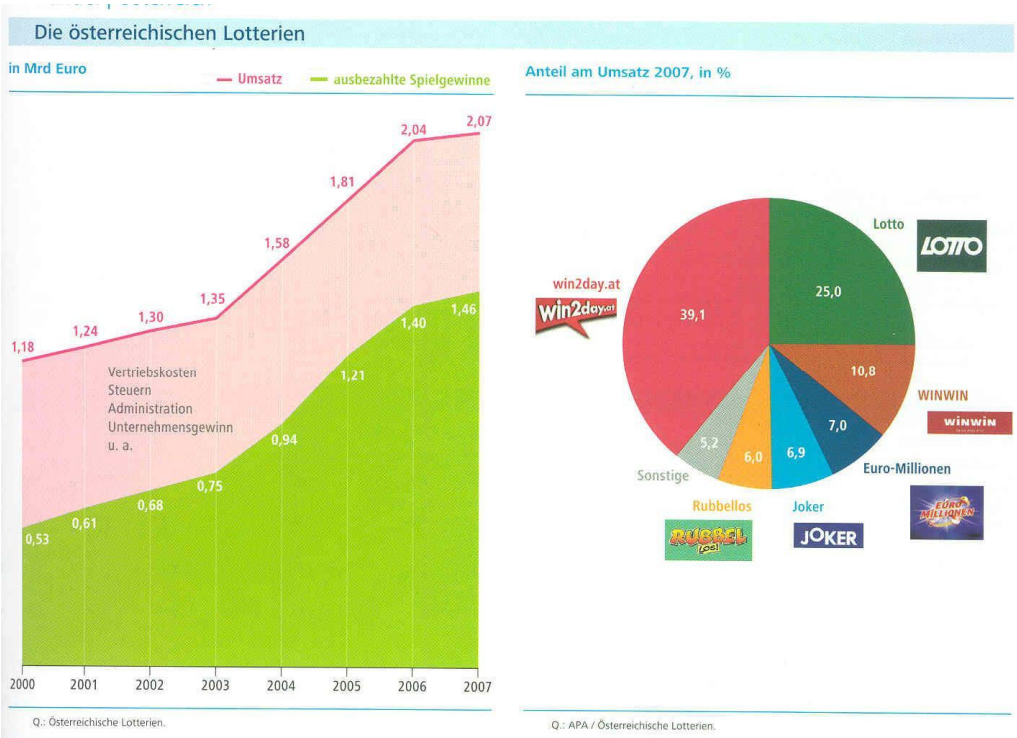
Kreuzen Sie bei jeder der folgenden Aussagen an, ob sie zutreffend oder nicht zutreffend ist!

	trifft zu	trifft nicht zu
Wenn man (bei Genauigkeit ±2%) die Irrtumswahrscheinlichkeit erhöht (zB auf 10%), dann müsste man mehr als 2400 Jugendliche befragen.	☐	☐
Wenn man (bei Irrtumswahrscheinlichkeit 5%) die verlangte Genauigkeit erhöht (zB auf ±1%), dann müsste man mehr als 2400 Jugendliche befragen.	☐	☐
Würde man die Befragung in der viel kleineren Stadt Salzburg durchführen, so käme man (bei Genauigkeit ±2% und Irrtumswahrscheinlichkeit 5%) mit einer kleineren Stichprobe als 2400 aus.	☐	☐
Die Statistikerin ist bei ihrer Berechnung von der Annahme ausgegangen, dass ca. jede/r zweite Jugendliche im Alter von 18 Jahren täglich Alkohol konsumiert. Wenn dieser Anteil deutlich geringer ist, dann kommt man (bei Genauigkeit ±2% und Irrtumswahrscheinlichkeit 5%) mit einer kleineren Stichprobe als 2400 aus.	☐	☐

Prototypische Aufgaben – Teil II

Lotterien

Die folgenden Grafiken zeigen die Umsätze bzw. die ausbezahlten Spielgewinne österreichischer Lotterien in den Jahren 2000-2007 sowie den Anteil der einzelnen Lotterien am Umsatz des Jahres 2007.



Quelle: Österreichs Wirtschaft im Überblick

Aufgabenstellungen

a) Zeichnen Sie ein Stabdiagramm für die Umsätze (in Euro) der verschiedenen Lotterien im Jahre 2007, bei dem der Umsatz von winwin besonders hervorsticht!

b) Zeichnen Sie ein Liniendiagramm, das die Veränderungen der „Vertriebskosten, Steuern, Administration, Unternehmensgewinn u. a.“ in den Jahren 2000-2007

(i) sehr gering (ii) sehr stark

erscheinen lässt!

Jahreseinkommen

Der folgenden Tabelle entnehmen Sie Informationen über die Netto-Jahreseinkommen der Angestellten im Jahre 2007 in Österreich:

Netto-Jahreseinkommen der österreichischen Angestellten (2007)

	Zahl der Personen	25% der Angestellten verdienten im Jahr 2007 weniger als …. Euro	50% der Angestellten verdienten im Jahr 2007 weniger als …. Euro	75% der Angestellten verdienten im Jahr 2007 weniger als …. Euro	Arithmetisches Mittel der Netto-Jahreseinkommen im Jahr 2007
Frauen	937.750	7.943	14.846	21.065	15.805
Männer	778.494	17.944	25.898	36.402	30.035
gesamt (f + m)	1.716.244				

Quelle: Statistik Austria

Aufgabenstellungen

a) Wie lässt sich der – vor allem bei den Männern recht deutliche – Unterschied zwischen arithmetischem Mittel und Median der Netto-Jahreseinkommen erklären?

b) Welches Streuungsmaß könnte man anhand der hier angegebenen Daten berechnen, um die Streuung der Einkommen der weiblichen Angestellten mit jener der männlichen Einkommen zu vergleichen? Ermitteln Sie die entsprechenden Werte!

c) Wie hoch war das arithmetische Mittel der Netto-Jahreseinkommen 2007 aller Angestellten?

d) Anhand der in obiger Tabelle angegebenen Daten ist es nicht möglich, das Medianeinkommen aller weiblichen und männlichen Angestellten zu ermitteln. Begründen Sie dies!

e) Im Jahre 2007 betrug das arithmetische Mittel der Netto-Jahreseinkommen aller 235.046 österreichischen Beamtinnen und Beamten € 31.048,-. Das arithmetische Mittel der Netto-Jahreseinkommen der österreichischen Beamtinnen betrug € 28.388,-, jenes der österreichischen Beamten € 32.817,- (Quelle: Statistik Austria).
Ermitteln Sie die Anzahl der österreichischen Beamtinnen und die Anzahl der österreichischen Beamten im Jahre 2007!

Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist eine wesentliche Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Schließenden Statistik.

Aufgabenstellung

Erläutern Sie die oben angeführte Aussage!
(Was besagt das empirische Gesetz der großen Zahlen? Für welche Wahrscheinlichkeitsinterpretation ist dieses Gesetz von zentraler Bedeutung und warum? Welche Bedeutung hat dies für die Schließende Statistik?)

Anteil an Akademiker(inne)n

Im Jahre 2008 betrug der Akademiker(innen)anteil in Österreich 12,0%, d. h., 12,0% aller Österreicherinnen und Österreicher im Alter von 25 Jahren und darüber hatten ein abgeschlossenes Hochschulstudium.
Wenn man unter allen Österreicher(inne)n (25 Jahre und älter) eine geeignete Stichprobe zieht, erwartet man, dass in dieser Stichprobe ebenfalls ungefähr 12,0% Akademiker(innen) sind.

Aufgabenstellung

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich die Formulierungen „erwartet man“ und „ungefähr“ mathematisch präzisieren und quantifizieren.
Beschreiben Sie, in welcher Weise diese Präzisierungen bzw. Quantifizierungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgen und formulieren Sie eine entsprechende Aussage für 1000 zufällig ausgewählte Österreicher(innen)!

Eine Zeitungsmeldung

In der „Presse“ konnte man am 9. 3. 2007 nebenstehende Kurznotiz lesen.

Zusatzinformationen:
Die zuletzt durchgeführte Befragung erfolgte 2007;
2004 wie auch 2007 wurden nur Personen im Alter von 15 Jahren und darüber befragt;
im Jahre 2004 wurden lediglich 200 Personen befragt.

Weniger Schilling-Rechner
Rund zwei Drittel der Österreicher (68 Prozent) rechnen Euro-Beträge noch immer in Schilling um. Das zeigt eine Umfrage unter 500 Österreichern durch den Marktforscher Markant. Vor drei Jahren rechneten noch 80 Prozent der Befragten Beträge in Schilling um. Bei den unter 30-Jährigen denkt die Hälfte der Befragten gar nicht mehr an den Schilling.

Aufgabenstellungen

a) Wie man dem Zeitungsartikel entnehmen kann, wurden 2007 lediglich 500 Personen befragt, im ersten Satz des Artikels wird jedoch eine Aussage über alle Österreicher(innen) gemacht. Wie ist das zu verstehen, wie ist dieses Vorgehen zu erklären, wie ist diese Aussage zu interpretieren?

b) Ermitteln Sie ein 95%-Konfidenzintervall für den relativen Anteil der Österreicher(innen) im Alter von 15 Jahren und darüber, die Euro-Beträge 2007 noch immer in Schilling umgerechnet haben und formulieren Sie damit eine statistisch korrekte Aussage über diesen relativen Anteil unter allen Österreicher(inne)n (im Alter von 15 Jahren und darüber)!

c) Das entsprechend Aufgabe b) für die Befragung 2004 ermittelte 95%-Konfidenzintervall ist [0,744; 0,856]. Wie beurteilen Sie anhand dieses und des in Aufgabe b) ermittelten Konfidenzintervalls die Veränderungen zwischen 2004 und 2007?

d) Wenn 2007 unter den Befragten 110 Personen im Alter zwischen 15 und 30 waren, was kann man dann mit 95% Sicherheit über den relativen Anteil jener Österreicher(innen) dieser Altersgruppe sagen, die an den Schilling gar nicht mehr denken?

Eckdaten des Schulversuchs

Im Schuljahr 2011/12 soll im Rahmen eines Schulversuchs erstmalig in Österreich eine zentrale, kompetenzorientierte sRP im Fach Mathematik an ausgewählten Versuchsschulen der AHS erprobt werden. Die folgende Übersicht zeigt die wesentlichen Stationen der Vorbereitung, Durchführung und Nachbereitung dieses Schulversuchs:

07/2008 – 09/2009	Konzept- und Materialentwicklung
10/2009	Information der österreichischen AHS über den Schulversuch und die vorangehende Pilotphase im Rahmen von regionalen Informationsveranstaltungen; Information über die Homepage des Instituts für Didaktik der Mathematik (Kompetenzzentrum) und des bifie
12/2009	Auswahl der Pilotschulen
01/2010	regionale Auftaktveranstaltung für Pilotschulen
01/2010 – 04/2012	Pilotphase mit - Beratung und Betreuung der Pilotschulen durch die regionalen AGs - Weiterentwicklung und Konkretisierung der bei der zentralen sRP im Schulversuch überprüften Kompetenzen durch Aushandlung und Prozessevaluation - Projektinformationen und -materialien über die Homepage des Instituts für Didaktik der Mathematik (Kompetenzzentrum) und des bifie - 10/2010: Beantragung des Schulversuchs durch die Pilotschulen und Genehmigung des Schulversuchs - vier Pilottests: 02/2010, 10/2010, 10/2011, 02/2012 - vier Vergleichstests an nicht betreuten Schulen: 03/2010, 11/2010, 11/2011, 03/2012
05/2012	zentrale sRP im Schulversuch
05/2012 – 10/2012	Evaluation des Schulversuchs
12/2012	Abschlussbericht

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte der Pilotphase bis hin zur Einführung und Evaluation des geplanten Schulversuchs kurz erläutert.

Vorbereitung der Pilotphase

Information der Schulen

Im Juni und September 2009 werden alle österreichischen AHS vom bifie Wien schriftlich über die Durchführung des Schulversuchs mit vorangehender Pilotphase informiert und zur Teilnahme an einer regionalen Informationsveranstaltung eingeladen.
Von jeweils 4-5 Mitgliedern der regionalen AGs und der Steuerungs- und Kontrollgruppe werden im Oktober 2009 halbtägige regionale Informationsveranstaltungen in Wien, Graz und Salzburg angeboten, in denen interessierte Vertreter(innen) der Schulen dieser Regionen über den geplanten Schulversuch informiert und mit Informationsmaterial versorgt werden.

Auswahl der im Rahmen des Projekts betreuten Schulen

Im November 2009 ist seitens der Schulen eine verbindliche Zumeldung zur Teilnahme an der Pilotphase erforderlich.
Da im Rahmen des Projekts insgesamt nur ca. 20 Schulen (6-8 Schulen pro regionaler Arbeitsgruppe) begleitet und betreut werden können, ist bei einer größeren Zahl von Anmeldungen eine Auswahl zu treffen. Eine solche Auswahl erfolgt durch die Steuerungs- und Kontrollgruppe in Absprache mit dem bifie Wien im Dezember 2009.
Nicht ausgewählte Schulen können selbstverständlich auch am Schulversuch 2011/12 teilnehmen, sie können lediglich nicht im Rahmen des Projekts betreut werden.

Die Pilotphase

Betreuung der Pilotschulen, Aushandlung von Grundkompetenzen

Die Pilotphase beginnt mit einer regionalen Auftaktveranstaltung im Jänner 2010.
Die im Rahmen des Projekts aufgenommenen Pilotschulen werden durch Mitarbeiter(innen) der regionalen AGs betreut. Diese Betreuung erfolgt in Form von Beratungen hinsichtlich der Unterrichtsgestaltung und hinsichtlich unterrichtlicher Schwerpunktsetzungen, in Form von Beratung und Unterstützung bei der Entwicklung von Aufgaben und Unterrichtsmaterialien sowie in Form von Unterstützungen bei Unterrichtsevaluationen sowie bei der Interpretation von Evaluationsergebnissen und bei der Diskussion zielführender Konsequenzen.
Die enge Kooperation mit Lehrerinnen und Lehrern soll zugleich auch zu einer Aushandlung, Weiterentwicklung und Konkretisierung der Grundkompetenzen und der prototypischen Aufgaben genutzt werden.

Pilottests

Im Februar 2010 sollen in den Pilotschulen bzw. -klassen ein erster Pilottest (zu Inhalten der 5. Klasse) durchgeführt, die Ergebnisse ausgewertet, mit den jeweiligen Klassenlehrer(inne)n besprochen und im Hinblick auf zielführende unterrichtliche Maßnahmen diskutiert werden.
Weitere drei Pilottests mit entsprechender Vor- und Nachbereitung folgen im Oktober 2010 (zu Inhalten der 5. und 6. Klasse), im Oktober 2011 (zu Inhalten der 5., 6. und 7. Klasse) sowie im Februar 2012 (zu Inhalten der 5. – 8. Klasse).

Die Pilottests werden von den jeweiligen Klassenlehrer(inne)n anhand von genauen schriftlichen Korrekturanleitungen ausgewertet, die Auswertungen werden von Mitarbeiter(inne)n der AGs überprüft und mit den zuständigen Klassenlehrer(inne)n besprochen.

Vergleichstests

Parallel zu den Pilottests in den Pilotschulen werden Vergleichstests in 4-5 Klassen (ca. 100 Schülerinnen und Schüler) in nicht betreuten Schulen durchgeführt. Dabei werden die Aufgaben aus den Pilottests eingesetzt.

Der Schulversuch

Im Rahmen des Schulversuchs soll die schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik nach dem hier vorliegenden Konzept zeitgleich für alle Versuchsschulen im Mai 2012 erfolgen.

Schaffung der rechtlichen Grundlagen, Beantragung des Schulversuchs

Auf der Basis des hier vorliegenden Konzepts sollen zu Beginn des Schuljahres 2010/11 die rechtlichen Voraussetzungen für die Durchführung des Schulversuchs im Schuljahr 2011/12 geschaffen und von den interessierten (Pilot-)Schulen entsprechende Anträge gestellt werden.

Auswahl der Aufgaben der zentralen sRP

Die bei der sRP gestellten Aufgaben werden vom Projektleiter – unter Bedachtnahme auf die Erfahrungen aus den ersten drei Pilottests – aus jenem Aufgabenpool ausgewählt, der von der Steuerungs- und Kontrollgruppe akzeptiert wurde.
Ein Entwurf für eine zentrale sRP im Fach Mathematik wird im Dezember 2011 dem bifie zur Begutachtung übergeben. Unter Berücksichtigung der Gutachten und der Erfahrungen aus dem vierten Pilottest (02/2012) wird dann vom Projektleiter das Testheft für die zentrale sRP im Schulversuch erstellt (Prototyp, Druckvorlage) und dem bifie im März 2012 zur Vervielfältigung und Distribution übergeben.

Durchführung der zentralen sRP

Die Durchführung der zentralen sRP erfolgt im Mai 2012 zu einem für alle Versuchsschulen bzw. -klassen gleichen Termin. Die Prüfungsaufsicht sollte von einem/einer klassenfremden Lehrer(in) übernommen werden.
Die Korrektur der Arbeiten erfolgt durch die jeweilige Klassenlehrerin bzw. den jeweiligen Klassenlehrer; dieses Vorgehen wird seitens des Projektteams kontrolliert und evaluiert.

Evaluation des Schulversuchs

Die Erfahrungen bei der Vorbereitung, Durchführung und Evaluation des Schulversuchs werden systematisch gesammelt und dokumentiert. Insbesondere werden die Ergebnisse der Pilottests, der Vergleichstests und der schriftlichen Reifeprüfung im Evaluationsbericht ausführlich dargestellt, interpretiert und bewertet; die Erfahrungen und Einschätzungen der am Schulversuch beteiligten Lehrer(innen) werden gesammelt, dokumentiert und im Gesamtzusammenhang interpretiert.

In einem Resümee werden auf der Basis der Erfahrungen in der Pilotphase und im Schulversuch Vorschläge zur Gestaltung der künftigen sRP im Fach Mathematik unterbreitet und begründet.