Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe

Version 4/07

Herausgegeben vom

Institut für Didaktik der Mathematik
– Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik –

Fakultät für interdisziplinäre Forschung und Fortbildung
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Klagenfurt 2007

Alle Rechte liegen beim Herausgeber.

Vorwort

Einem internationalen Trend folgend wird in Österreich seit mehreren Jahren an der Entwicklung so genannter (Bildungs-)Standards für verschiedene Fächer (vor allem Deutsch, Englisch, Mathematik) und verschiedene Schultypen bzw. -stufen (Grundschule, Hauptschule und AHS-Unterstufe, AHS Oberstufe und BHS) gearbeitet.
Die zentrale Intention dieser Bemühungen ist es, den inputorientierten Lehrplänen ein outputorientiertes Steuerungsinstrument zur Seite zu stellen: Während Lehrpläne Aussagen darüber machen, was im Unterricht behandelt werden soll (Inputsteuerung), sollen Standards festlegen, über welche fachbezogenen Fähigkeiten Schülerinnen und Schüler (S&S) am Ende einer bestimmten Schulstufe verfügen sollen (Outputsteuerung). Diese Festlegungen sollen so erfolgen, dass sie empirischen Überprüfungen zugänglich sind (Outputkontrolle).
Outputsteuerung meint, dass Konzeption, Planung und Durchführung des Unterrichts darauf Bedacht nehmen, dass die S&S die in den Standards dargelegten Fähigkeiten entwickeln; von der Outputkontrolle erwartet man verlässliche Befunde über landesweite, schul- und allenfalls auch klassenspezifische Stärken und Schwächen österreichischer S&S, die dann eine Grundlage für zielgerichtete Bemühungen und Maßnahmen zur entsprechenden Weiterentwicklung des jeweiligen Unterrichts sein können. Es ist jedoch nicht daran gedacht, die Testinstrumente dieser Systemevaluation zur Diagnose individueller Fähigkeiten einzelner S&S, zur Einstufung in Leistungsgruppen oder als Instrument der Leistungsbeurteilung einzusetzen.

Im Oktober 2004 wurde vom BMBWK die Broschüre „Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe“, Version 3.0, herausgegeben. Das darin dargelegte Standardkonzept (mit ca. 50 prototypischen Aufgaben) war in der Folge Grundlage für diverse begleitende Entwicklungen und Untersuchungen, insbesondere auch für die Entwicklung von Testitems und deren Evaluierung an zahlreichen „Pilotschulen“.
Das Kernstück dieses Standardkonzepts bildet ein auf H. Heugl und J. Lechner zurückgehendes „Kompetenzmodell“, das mathematische Kompetenzen als langfristig verfügbare Fähigkeiten beschreibt, die jeweils durch verschiedene Ausprägungen entlang dreier Dimensionen (Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsdimension) charakterisiert sind.
Wesentlich erscheint in diesem Konzept weiters, dass die festgelegten Standards als „Regelstandards“ verstanden werden (also nicht auf Minimalanforderungen, sondern auf „durchschnittliche“ Leistungen von S&S abzielen) und dass sie sich innerhalb des durch den Lehrplan vorgegebenen (fachinhaltlichen) Rahmens bewegen (müssen).

Im Oktober 2006 wurde die Abteilung (seit 2007 Institut) für Didaktik der Mathematik – Österreichisches Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik, Universität Klagenfurt, vom BMBWK mit einer Überarbeitung des Standardkonzepts beauftragt. Konkret sind damit folgende Arbeiten gemeint:

- Explizierung von bildungstheoretischen Orientierungen für die Entwicklung von Standards für den Mathematikunterricht am Ende der 8. Schulstufe

- Revision, didaktische Prüfung und Weiterentwicklung des vorliegenden Modells für mathematische Kompetenzen
- Identifikation, Festlegung und Beschreibung mathematischer Standards für die 8. Schulstufe (unter Berücksichtigung/Einbeziehung der vorliegenden Standards)
- Entwicklung von prototypischen Aufgaben mit Erläuterungen hinsichtlich ihrer Lösung und Zuordnung

Die erforderlichen Arbeiten wurden von einer von H. Heugl und W. Peschek geleiteten Arbeitsgruppe des Österreichischen Kompetenzzentrums für Mathematikdidaktik durchgeführt. Mitarbeiter(innen) dieser Arbeitsgruppe sind: M. Dangl, G. Jurkowitsch, M. Katzenberger, B. Kröpfl, F. Picher, E. Schneider, R. Scheriau.

Ein Entwurf des überarbeiteten Standardkonzepts wurde österreichischen Fachdidaktiker(inn)en der Universitäten Linz, Salzburg und Wien sowie der Technischen Universität Wien zur Begutachtung vorgelegt. Die Gutachten führten zu einer Überarbeitung des Entwurfs und zum vorliegenden Bericht. Sie können aber auch Grundlage für künftige Weiterentwicklungen des Standardmodells sowie didaktischer Arbeiten dazu sein.

Klagenfurt, 30. April 2007 H. Heugl W. Peschek

Inhaltsübersicht

1. Bildungstheoretische Orientierung 7

2. Ein Modell für mathematische Kompetenzen 9

3. Mathematische Standards für die 8. Schulstufe 10

   Handlungsbereiche 10

   Inhaltsbereiche 13

   Komplexitätsbereiche 14

4. Konkretisierung der Standards in Aufgaben 15

   Zahlen und Maße 17

   Variable, funktionale Abhängigkeiten 43

   Geometrische Figuren und Körper 69

   Statistische Darstellungen und Kenngrößen 95

1. Bildungstheoretische Orientierung

Die Identifikation und Festlegung der in Abschnitt 3 dargelegten Standards für den Mathematikunterricht am Ende der 8. Schulstufe orientieren sich an zwei einander ergänzenden bildungstheoretischen Anforderungen: Lebensvorbereitung und Anschlussfähigkeit.

Lebensvorbereitung

Eine weitgehend unbestrittene Aufgabe der (Pflicht-)Schule ist es, die S&S auf das Leben in unserer Gesellschaft vorzubereiten, ihnen das für eine selbstbestimmte und aktive Teilnahme am Leben in dieser Gesellschaft notwendige Rüstzeug mitzugeben.
Für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I wird es also vor allem darum gehen, die Lernenden mit jenem mathematischen Wissen und Können auszustatten, das für eine aktive, unbehinderte, reflektierte, kritische, emanzipierte Teilnahme am Leben in unserer Gesellschaft erforderlich/unerlässlich ist. (Dieses Anliegen bildet auch das Kernstück der dem PISA-Test Mathematik zugrunde liegenden „mathematical literacy".)

Mathematik begegnet uns in lebensweltlichen Zusammenhängen in vielfältiger Weise:
Täglich und fast überall trifft man auf mathematische Zeichen, Darstellungen und Objekte – Mathematik ist *Inventar unserer Lebenswelt*. Dieses mathematische Inventar ist dann auch wesentliches Mittel menschlicher Verständigung – Mathematik ist ein wichtiges *Mittel menschlicher* (Massen-)*Kommunikation.*
Mathematik ist aber auch eine spezifische Brille, durch die wir die Welt sehen, und sie ist zugleich auch ein Instrument, mit dem wir die Welt, in der wir leben, strukturieren, ordnen und gestalten. Mathematik ist also sowohl *Erkenntnis-* als auch *Konstruktionsmittel*.
Nicht zuletzt ist die Mathematik mit ihren Verfahren aber auch ein Werkzeug zur Lösung von (mathematisch modellierten) Problemen und mit ihren logischen wie heuristischen Strategien eine spezifische Technik des Problemlösens – Mathematik ist eine *Denktechnologie*.

Mathematische Standards, die sich an der Lebensvorbereitung orientieren, werden sich also nicht auf operative Aspekte der Mathematik beschränken können, sondern auch konstruktive (z. B. Modellbilden) und vor allem kommunikative Aspekte der Mathematik (etwa Darstellen, Interpretieren, Begründen) in den Blick nehmen müssen, diese reflektieren und vernetzen.
Da die vielfältigen gegenwärtigen und zukünftigen Lebenssituationen der Lernenden kaum vorhersehbar, jedenfalls aber nicht vorwegnehmbar sind, ist jedoch weniger spezifisches Wissen und Können gefordert als die flexible Anwendung grundlegenden Wissens und Könnens auf vielfältige, auch weniger vertraute Situationen. Zugleich ist auch die für die Problemstellungen und -lösungen geforderte Authentizität keine strikte, sondern eher eine potenzielle: Problemstellungen und -lösungen müssen nicht notwendigerweise unverändert realen (Alltags-)Situationen bzw. den lebensweltlichen Erfahrungen der S&S entnommen werden, entsprechende Bezüge sollten aber herstellbar sein.

Anschlussfähigkeit

Viele S&S besuchen nach der 8. Schulstufe weiterführende Schulen, in denen Mathematik als Pflichtfach geführt wird oder mathematische Kenntnisse in anderen Fächern benötigt und fachspezifisch weiterentwickelt werden. Ähnliches gilt für die Berufsausbildung sowie für spätere Berufe, in denen weiterführende mathematische Anforderungen auftreten.

Anschlussfähigkeit fokussiert auf mathematisches Wissen und Können, die als *Grundlage für* eine *weiterführende mathematische Ausbildung* bzw. für die Bewältigung von mathematischen Anforderungen, die über Alltagserfordernisse hinausgehen, hilfreich erscheinen. Anschlussfähigkeit ist in diesem Sinne eine Form der „Kommunikationsfähigkeit" (Kommunikation mit mathematisch höher Gebildeten) wie auch Lebensvorbereitung im weiteren Sinne (etwa im Sinne „lebenslangen Lernens").

Anschlussfähigkeit erfordert nicht grundsätzlich andere mathematische Fähigkeiten als die unmittelbare Lebensvorbereitung, sie verweist jedoch auch auf inhaltliche Erweiterungen, nimmt auf eine deutlichere Explizierung (inner-)mathematischer Zusammenhänge und Strukturen Bedacht und betont spezifische mathematische Tätigkeiten (Formalisieren, Definieren, Beweisen u. Ä.) stärker.

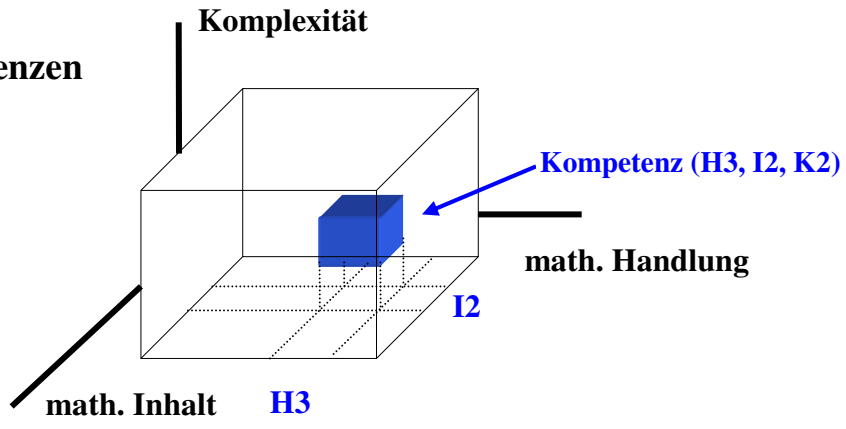
2. Ein Modell für mathematische Kompetenzen

Unter **Kompetenzen** werden hier *längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten* verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten in variablen Situationen auszuüben, sowie die Bereitschaft, diese Fähigkeiten und Fertigkeiten einzusetzen.

Mathematische Kompetenzen beziehen sich auf *mathematische Tätigkeiten*, auf *mathematische Inhalte* sowie auf die *Art und Komplexität* der erforderlichen Vernetzungen.
Mathematische Kompetenzen haben somit eine *Handlungsdimension* (auf welche Art von Tätigkeit sie sich beziehen, also *was* getan wird), eine *Inhaltsdimension* (auf welche Inhalte sie sich beziehen, also *womit* etwas getan wird) und eine *Komplexitätsdimension* (bezogen auf die Art und den Grad der Vernetzungen).

Für jede Dimension mathematischer Kompetenzen sind unterschiedliche Ausprägungen vorstellbar: Unterschiedliche mathematische Handlungen, unterschiedliche mathematische Inhalte sowie unterschiedliche Arten und Grade der Komplexität. Im hier verwendeten Modell mathematischer Kompetenzen werden „verwandte“ Handlungen zu **Handlungsbereichen** (H1, H2, …), „verwandte“ Inhalte zu **Inhaltsbereichen** (I1, I2, …) und „verwandte“ Arten bzw. Grade von Vernetzungen zu **Komplexitätsbereichen** (K1, K2, …) zusammengefasst:

Ein Modell mathematischer Kompetenzen



Eine spezifische **mathematische Kompetenz** in dem hier verwendeten Sinne wird also durch einen bestimmten *Handlungsbereich*, einen bestimmten *Inhaltsbereich* und durch einen bestimmten *Komplexitätsbereich*, also durch ein **Tripel** (z. B. (H3, I2, K2)), charakterisiert und festgelegt.

Beispiel: Eine spezifische Kompetenz ist die Fähigkeit zur Interpretation (Handlungsbereich) von mathematischen Darstellungen funktionaler Sachverhalte (Inhaltsbereich), wobei mehrere Fakten/Zusammenhänge/Darstellungen/Handlungen miteinander in Verbindung gebracht werden müssen (Komplexitätsbereich).

3. Mathematische Standards für die 8. Schulstufe

Mathematische Standards meinen jene Teilmenge denkbarer mathematischer Kompetenzen, über die S&S ab einer bestimmten Schulstufe verfügen sollten.

Die hier dargelegten mathematischen Standards beschreiben jene mathematischen Kompetenzen, die S&S *bis zum Ende der 8. Schulstufe* entwickelt und längerfristig verfügbar haben sollten.
Die Auswahl, Konkretisierung und Festlegung dieser mathematischen Standards orientieren sich am eingangs dargelegten bildungstheoretischen Rahmen (unter Bedachtnahme auf den zur Zeit gültigen Lehrplan), ihre Beschreibung erfolgt entlang der Dimensionen des zuvor beschriebenen Modells mathematischer Kompetenzen.

Einsatz von Technologien
Mathematisches Tun wird heute in vielen Bereichen durch die permanente Verfügbarkeit und Verwendung elektronischer Werkzeuge unterstützt oder überhaupt erst ermöglicht. Dies gilt für nahezu alle Ebenen mathematischen Arbeitens. Eine entsprechende „Werkzeugkompetenz“ ist daher integraler Bestandteil mathematischer Kompetenzen. Eine zeitgemäße mathematische Ausbildung wird diesem Umstand durch Anleitung zu sinnvollem und zweckmäßigem Einsatz ständig verfügbarer Technologien Rechnung tragen.
Gegenwärtigen internationalen Standards mathematischer Grundbildung in der Pflichtschule entspricht die durchgängige Verwendung von Taschenrechnern, Tabellenkalkulation und/oder grafikfähigen Rechnern; die Verwendung von Computeralgebra-Systemen und Dynamischer Geometrie Software sollte (im Hinblick auf die „Anschlussfähigkeit“ zu weiterführender mathematischer Ausbildung wie auch im Hinblick auf absehbare künftige Entwicklungen) bereits in der Sekundarstufe I zumindest mit bedacht, besser bereits vorbereitet werden.
Bei der folgenden Charakterisierung der mathematischen Standards wird darauf verzichtet, die mit elektronischen Werkzeugen verbundenen Anforderungen jeweils explizit als eigene Standards auszuweisen: Die ständige Verfügbarkeit und der sinnvolle Einsatz angemessener elektronischer Werkzeuge seitens der Lernenden ist jedoch bei jedem der angeführten mathematischen Standards mit gedacht und gefordert.

Handlungsbereiche

Mathematisches Arbeiten umfasst vielfältige originär mathematische wie auch außermathematische (Denk-)Tätigkeiten, die meist eng miteinander vernetzt sind bzw. aufeinander bezogen werden müssen.
Für die mathematischen Standards am Ende der 8. Schulstufe wurden die folgenden vier zentralen mathematischen Tätigkeiten bzw. Tätigkeitsbereiche identifiziert und als gleich bedeutsame Handlungsbereiche festgehalten:

H1	**Darstellen, Modellbilden**	*Darstellen* meint die Übertragung gegebener mathematischer Sachverhalte in eine (andere) mathematische Repräsentation bzw. Repräsentationsform. *Modellbilden* erfordert über das Darstellen hinaus, in einem gegebenen Sachverhalt die relevanten mathematischen Beziehungen zu erkennen (um diese dann in mathematischer Form darzustellen), allenfalls Annahmen zu treffen, Vereinfachungen bzw. Idealisierungen vorzunehmen u. Ä. Charakteristische Tätigkeiten sind z. B.: • alltagssprachliche Formulierungen in die Sprache/Darstellung der Mathematik übersetzen • einen gegebenen mathematischen Sachverhalt in eine andere Darstellungsform (tabellarisch, grafisch, symbolisch/Rechnersyntax) übertragen; zwischen Darstellungen oder Darstellungsformen wechseln • Zeichnungen (mit Lineal oder Freihandskizze) einfacher geometrischer Figuren und Körper anfertigen • problemrelevante mathematische Zusammenhänge identifizieren und mathematisch darstellen • geeignete mathematische Mittel (Begriffe, Modelle, Darstellungsformen, Technologien) und Lösungswege auswählen • aus bekannten (z. B. auch elektronisch verfügbaren) mathematischen Modellen neue Modelle entwickeln (modulares Arbeiten)
H2	**Rechnen, Operieren**	*Rechnen* im engeren Sinn meint die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen, Rechnen in einem weiteren Sinn meint die regelhafte Umformung symbolisch dargestellter mathematischer Sachverhalte. *Operieren* meint allgemeiner und umfassender die Planung sowie die korrekte, sinnvolle und effiziente Durchführung von Rechen- oder Konstruktionsabläufen und schließt z. B. geometrisches Konstruieren oder auch das Arbeiten mit bzw. in Tabellen und Grafiken mit ein. Rechnen/Operieren schließt immer auch die verständige und zweckmäßige Auslagerung operativer Tätigkeiten an die verfügbare Technologie mit ein. Charakteristische Tätigkeiten sind z. B.: • elementare Rechenoperationen durchführen, potenzieren, Wurzel ziehen • Maßeinheiten umrechnen • in Terme und Gleichungen (Formeln) Zahlen einsetzen, Werte berechnen • Terme, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen umformen • Gleichungen und Ungleichungen lösen • Ergebnisse abschätzen, sinnvoll runden, näherungsweise rechnen • mit und in Tabellen oder Grafiken operieren • elementare geometrische Konstruktionen durchführen

H3	**Interpretieren**	*Interpretieren* meint, aus mathematischen Darstellungen Fakten, Zusammenhänge oder Sachverhalte zu erkennen und darzulegen sowie mathematische Sachverhalte und Beziehungen im jeweiligen Kontext zu deuten. Charakteristische Tätigkeiten sind z. B.: • Werte aus Tabellen oder grafischen Darstellungen ablesen, sie im jeweiligen Kontext deuten • tabellarisch, grafisch oder symbolisch gegebene Zusammenhänge beschreiben und im jeweiligen Kontext deuten • Zusammenhänge und Strukturen in Termen, Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen erkennen, sie im Kontext deuten • mathematische Begriffe oder Sätze im jeweiligen Kontext deuten • Rechenergebnisse im jeweiligen Kontext deuten • tabellarische, grafische oder auch symbolische Rechnerdarstellungen angemessen deuten • zutreffende und unzutreffende Interpretationen erkennen
H4	**Argumentieren, Begründen**	*Argumentieren* meint die Angabe von mathematischen Aspekten, die für oder gegen eine bestimmte Sichtweise/Entscheidung sprechen. Argumentieren erfordert eine korrekte und adäquate Verwendung mathematischer Eigenschaften/Beziehungen, mathematischer Regeln sowie der mathematischen Fachsprache. *Begründen* meint die Angabe einer Argumentation(skette), die zu bestimmten Schlussfolgerungen/Entscheidungen führt. Charakteristische Tätigkeiten sind z. B.: • mathematische Argumente nennen, die für oder gegen die Verwendung eines bestimmten mathematischen Begriffs, eines Modells oder einer Darstellung(sform), für oder gegen einen bestimmten Lösungsweg bzw. eine bestimmte Lösung, für oder gegen eine bestimmte Interpretation sprechen • die Entscheidung für die Verwendung eines bestimmten mathematischen Begriffs, eines Modells, eines Lösungsweges, für eine Darstellung(sform), eine bestimmte Lösung oder eine bestimmte Sichtweise/Interpretation argumentativ belegen • mathematische Vermutungen formulieren und begründen (aufgrund deduktiven, induktiven oder analogen Schließens) • mathematische Zusammenhänge (Formeln, Sätze) herleiten oder beweisen • zutreffende und unzutreffende mathematische Argumentationen bzw. Begründungen erkennen; begründen, warum eine Argumentation oder Begründung (un-)zutreffend ist

Inhaltsbereiche

Die Inhalte wurden unter Bedachtnahme auf den derzeit gültigen Lehrplan ausgewählt und nach innermathematischen Gesichtspunkten zu folgenden vier Inhaltsbereichen zusammengefasst:

I1	**Zahlen und Maße**	Verschiedene Zahlen und Maße (insbesondere auch in lebenspraktischen Anwendungen); konkret: • natürliche, ganze, rationale und irrationale Zahlen • Bruch- und Dezimaldarstellung rationaler Zahlen; Potenzschreibweise (mit ganzzahligen Exponenten), Wurzeln • Rechenoperationen, Rechengesetze und -regeln • Anteile, Prozente, Zinsen • Maßeinheiten (für Längen, Flächeninhalte, Volumina, Massen, Zeiten und zusammengesetzte Größen)
I2	**Variable, funktionale Abhängigkeiten**	Variable, Terme und (Un-)Gleichungen; verschiedene Darstellungen funktionaler Zusammenhänge; konkret: • Variable und Terme • einfache Gleichungen (Formeln) und Ungleichungen • lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen • verbale, tabellarische, grafische und symbolische Darstellung funktionaler Zusammenhänge; lineare Funktionen; direkte und indirekte Proportionalität
I3	**Geometrische Figuren und Körper**	Grundlegende geometrische Begriffe; einfache geometrische Figuren und Körper, deren Eigenschaften und Darstellung (Zeichnung, Konstruktion); konkret: • Punkt, Gerade, Ebene; Strecke, Winkel; Parallele, Normale • Symmetrie, Ähnlichkeit • Dreiecke, Vierecke, Kreis • Würfel, Quader, Prismen, Pyramiden, Zylinder, Kegel, Kugel • Satz von Pythagoras • Umfangs-, Flächen-, Oberflächen- und Volumsformeln
I4	**Statistische Darstellungen und Kenngrößen**	Tabellarische und grafische Darstellungen statistischer Daten; Zentralmaße und Streuung; konkret: • tabellarische Darstellung statistischer Daten • Stabdiagramm, Kreisdiagramm, Streifendiagramm, Piktogramm, Liniendiagramm; Streudiagramm • absolute und relative Häufigkeiten • arithmetisches Mittel, Median, Quartile • Spannweite, Interquartilabstand

Komplexitätsbereiche

Mathematische Anforderungen bzw. die zu ihrer Bewältigung erforderlichen Kompetenzen können sich nicht nur hinsichtlich der erforderlichen Handlung und hinsichtlich des mathematischen Inhalts, sondern sehr wesentlich auch hinsichtlich der zu bewältigenden Komplexität unterscheiden:
Manche Problemstellungen erfordern lediglich die direkte Anwendung eines Begriffes, Satzes oder Verfahrens bzw. die Ausführung einer elementaren mathematischen Tätigkeit. Andere Aufgabenstellungen hingegen verlangen eine geeignete Kombination und Vernetzung mehrerer mathematischer Begriffe, Sätze oder Tätigkeiten. Wieder andere Aufgaben erfordern ein Nachdenken über Eigenschaften und Zusammenhänge, die am gegebenen mathematischen Sachverhalt nicht unmittelbar erkennbar sind.
Die Komplexitätsdimension der mathematischen Standards versucht diesen unterschiedlichen Komplexitätsanforderungen Rechnung zu tragen; sie umfasst folgende drei Bereiche:

K1	**Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten**	*Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten* meint die Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden mathematischen Begriffen, Sätzen, Verfahren und Darstellungen. In der Regel ist nur reproduktives mathematisches Wissen und Können oder die aus dem Kontext unmittelbar erkennbare direkte Anwendung von mathematischen Kenntnissen bzw. Fertigkeiten geringer Komplexität erforderlich.
K2	**Herstellen von Verbindungen**	Das *Herstellen von Verbindungen* ist erforderlich, wenn der mathematische Sachverhalt und die Problemlösung komplexer sind, sodass mehrere Begriffe, Sätze, Verfahren, Darstellungen bzw. Darstellungsformen (aus verschiedenen mathematischen Gebieten) oder auch verschiedene mathematische Tätigkeiten in geeigneter Weise miteinander verbunden werden müssen.
K3	**Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren**	*Reflektieren* meint das Nachdenken über Zusammenhänge, die aus dem dargelegten mathematischen Sachverhalt nicht unmittelbar ablesbar sind. Reflektieren umfasst das Nachdenken über eine mathematische Vorgehensweise (Lösungsweg/Lösung, Alternativen), über Vor- und Nachteile von Darstellungen/Darstellungsformen bzw. über mathematische Modelle (Modellannahmen, Idealisierungen, Aussagekraft, Grenzen des Modells, Modellalternativen) im jeweiligen Kontext sowie das Nachdenken über (vorgegebene) Interpretationen, Argumentationen oder Begründungen. *Reflexionswissen* ist ein anhand entsprechender Nachdenkprozesse entwickeltes Wissen über Mathematik. Reflexion(swissen) kann in vielfältiger Weise sichtbar werden: durch Dokumentation von Lösungswegen, durch entsprechende Entscheidungen, oft aber auch durch entsprechende Argumentationen und Begründungen.

Die Komplexität einer Aufgabe beeinflusst die objektive Anforderung, sie ist jedoch kein Maß für die subjektive oder psychometrische Schwierigkeit!

4. Konkretisierung der Standards in Aufgaben

Bei der Darlegung der Standards wurde darauf verzichtet, die durch das Modell erfassten 48 Kompetenzen allgemein zu beschreiben. Vielmehr werden diese Kompetenzen im Folgenden exemplarisch anhand von Aufgaben konkretisiert und operationalisiert.

Selbstverständlich kann durch eine einzelne Aufgabe eine Kompetenz nicht in ihrem vollen Umfang, hinsichtlich aller ihrer Aspekte und Facetten erfasst werden. Die Realisierung einer exemplarisch angeführten Tätigkeit an Hand eines einzelnen Inhalts garantiert also nicht die im Kompetenzmodell auf S. 9 durch einen Würfel dargestellte Kompetenz. (Beispiel: Das Übertragen einer funktionalen Abhängigkeit von einer vertrauten Darstellungsform in eine andere (H1, I2, K1) kann selbstverständlich nicht die gesamte Kompetenz des Darstellens/ Modellbildens bei Variablen und funktionalen Abhängigkeiten und direktem Einsatz von Grundkenntnissen abdecken.)

Den **Aufgaben** kommt eine **zweifache Orientierungsfunktion** zu:

1. Die Aufgaben sollen das dreidimensionale Standardmodell konkretisieren und erläutern: Sie sollen anhand konkreter mathematischer Aufgabenstellungen zeigen, wie die einzelnen Handlungs-, Inhalts- und Komplexitätsbereiche verstanden werden, insbesondere aber sollen sie exemplarisch zeigen, wie sich die Kompetenzen aus einem sinnvollen Zusammenwirken von Handlungsbereich, Inhaltsbereich und Komplexitätsbereich ergeben. Die Aufgaben sind somit **Beispiele für mögliche prototypische Konkretisierungen der** in den Standards erfassten 48 **Kompetenzen**.

2. Die Aufgaben sollen die Standard-Kompetenzen operationalisieren und **Hinweise auf die Anforderungen bei den** bundesweiten **Standardtests** geben: Die Aufgaben sind so konzipiert, dass sie nicht nur hinsichtlich Handlung, Inhalt und Komplexität auf die Anforderungen der Testitems verweisen, sondern auch hinsichtlich der Kontexte und der Antwortformate (kurze geschlossene Antworten, verschiedene Typen von Multiple-Choice-Antworten, offene Antworten).

Gute Aufgaben für die Unterrichtsarbeit im Fach Mathematik zeichnen sich in der Regel dadurch aus, dass sie in geeigneter Weise in den jeweils spezifischen unterrichtlichen Kontext und Prozess eingebettet sind und dass durch sie meist mehrere mathematische (wie auch fachübergreifende) Kompetenzen zugleich und miteinander vernetzt angesprochen werden. Diesem auf Inputsteuerung gerichteten Anspruch sind die hier angeführten Aufgaben nicht verpflichtet – und können ihm auch in keiner Weise gerecht werden:

Die Festlegung von Standards dient der Outputsteuerung bzw. der Outputkontrolle. Die hier entwickelten Standard-Aufgaben sind dem entsprechend als normative Instrumente

konzipiert, die der einzelnen Lehrerin und dem einzelnen Lehrer Hinweise darauf geben, über welche fachlichen Kompetenzen die S&S am Ende ihrer Schulzeit verfügen sollten bzw. wie diese zu verstehen sind. Und die Aufgaben sind zugleich als prototypische Evaluationsinstrumente konzipiert, die beispielhaft zeigen sollen, mit welchem Instrumentarium das Bildungssystem, einzelne Schulen wie auch einzelne Lehrerinnen und Lehrer zu differenzierten Rückmeldungen über den tatsächlich erreichten Unterrichtsertrag kommen (können).
Die im Folgenden angeführten **Aufgaben** sind in der vorliegenden Form also **nicht für** den Einsatz im Rahmen üblicher **Unterrichtsarbeit** gedacht; insbesondere wird man durch eine bloße Abarbeitung der vorliegenden Aufgaben im Unterricht nicht den durch die Standards geforderten Unterrichtsertrag erreichen. Als Konkretisierung des Kompetenzmodells liefern die Aufgaben jedoch Hinweise darauf, welche mathematischen Kompetenzen im Unterricht entwickelt werden sollten (Outputsteuerung) und sie können zu einer Reflexion („Schreibtischtest“) wie auch zur empirischen Überprüfung der Schwerpunktsetzungen (Stärken und Defizite) des eigenen Unterrichts herangezogen werden (Outputkontrolle).

Hinweis:
Wenn die Aufgaben als Testitems eingesetzt werden, sollten zu ihrer Bearbeitung die jeweils gewohnten technologischen Hilfsmittel zugelassen werden.

Zahlen und Maße

Bildungstheoretische Orientierung

Lebensvorbereitung

In alltäglichen Lebenssituationen kann es hilfreich sein, verschiedene symbolische und grafische Darstellungsformen und Darstellungen von Zahlen und Größen zu kennen, aktiv und passiv zwischen ihnen wechseln zu können und sich deren Äquivalenz bewusst zu sein. Dies betrifft auf symbolischer Ebene vorrangig die Dezimaldarstellung (inkl. Prozent), die Bruchdarstellung, die Potenzschreibweise (Zehnerpotenzen mit Exponenten aus Z) und die Rechnersyntax von Zahlen und Größen sowie auf grafischer Ebene Skalen-, Maßstabs-, Strecken- und Anteilsdarstellungen von Zahlen und Größen. Wichtig für einen aktiven Umgang mit diesen grundlegenden Zahldarstellungen ist auch ein grundlegendes Wissen über deren Stärken und Schwächen.

Operieren wird sich in alltäglichen Lebenssituationen im Wesentlichen auf elementare Rechnungen mit einfachen Zahlen beschränken, bei aufwändigeren Rechnungen wird man auf (Taschen-)Rechner zurückgreifen. Darüber hinaus ist auch ein flexibler operativer Umgang mit in Alltagssituationen gängigen Maßen (für Länge, Masse, Zeit, ...) und Konzepten (Anteile, Zinsen) erforderlich. Beim Operieren kann es in Alltagssituationen auch notwendig sein, mit dem Problem der Messgenauigkeit sicher umzugehen sowie Größenabschätzungen („Überschlagsrechnung“) vorzunehmen.

Modellbildungen werden sich in Alltagssituationen vorwiegend auf einfache Situationen beschränken.

Alltagssituationen erfordern ein sicheres und verständiges „Lesen“ (Deuten, Interpretieren) von Zahlenwerten, Größen, grundlegenden Rechenoperationen und Zahlenbeziehungen in Alltagskontexten, wie z. B. Lesen von Fahrplänen, Deuten einer Division, eines (Prozent-) Anteils, einer Äquivalenz von Werten. Wichtig dabei ist auch eine Sensibilität hinsichtlich der (Un-)Angemessenheit vorgegebener Interpretationen.

Argumentieren, Begründen wird sich in alltäglichen Lebenssituationen im Wesentlichen auf grundlegende Eigenschaften von elementaren arithmetischen Begriffen, auf grundlegende Rechenregeln bzw. -gesetze sowie insbesondere auf die Durchführung von elementaren Berechnungen („Rechenkette“) stützen. Dabei kommt es sowohl auf „aktives“ wie auch „passives“ Wissen (Bewertung von vorliegenden Argumenten, Begründungen) an.

Anschlussfähigkeit

Im Hinblick auf eine tiefergehende Untersuchung funktionaler Zusammenhänge als mathematische Strukturen bzw. Modelle (Funktionenlehre, Analysis) sind grundlegendes Wissen über die Zahlbereiche N, Z, Q und R (definitorische und zentrale Eigenschaften, symbolische und grafische Darstellungen – insbesondere Schreibweisen und Zahlengerade, Beziehungen untereinander) sowie über Potenzen (mit beliebiger Basis, Exponenten aus Z) und Wurzeln (Schreibweise, Definition, zentrale Eigenschaften, Potenzrechenregeln) von Bedeutung.

Das mathematische Konzept der Zinsen sowie Grundlagen der Zinsrechnung sind als Basis für weiterführende Anforderungen in der Finanzmathematik von Relevanz, jenes der Anteile auch für die Stochastik.
Das Arbeiten mit Anwendungen (z. B. aus Wirtschaft, Physik, Geographie, …) setzt entsprechende Kenntnisse und eine gewisse Sicherheit im Umgang mit anwendungsrelevanten Maßeinheiten voraus.
Grundlegende Kenntnisse und Fertigkeiten im Bereich der elementaren Rechenoperationen (Hierarchie, elementare Rechengesetze und -regeln) stellen unmittelbares Basiswissen und unmittelbare Basisfertigkeiten für weiterführende mathematische Inhalte bzw. über Alltagserfordernisse hinausführende mathematische Anforderungen dar.

I1: Zahlen und Maße
H1: Darstellen, Modellbilden
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Darstellungen einer Zahl

Gegeben ist die Zahl 0,035.

Aufgabe: Kreuze jene zwei Zahlen an (☒), die der gegebenen Zahl 0,035 entsprechen!

Lösung:

- ☐ $\frac{35}{1000}$
- ☐ $\frac{35}{100}$
- ☐ 35%
- ☐ 3,5%
- ☐ 0,35%

Richtige Lösung:

$$0{,}035 = \frac{35}{1000} \quad \text{und} \quad 0{,}035 = 3{,}5\%$$

Angesprochene Kompetenz: H1-I1-K1

H1: Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt auf der Übertragung einer in Dezimalschreibweise gegebenen Zahl in andere mathematische Zahldarstellung (Bruchdarstellung, Prozentschreibweise), also auf dem Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen.

I1: Es geht um verschiedene Darstellungen einer Zahl (Dezimal-, Bruchdarstellung, Prozentschreibweise).

K1: Die Aufgabe erfordert nur die direkte Anwendung von Wissen über verschiedene grundlegende Darstellungen (Schreibweisen) von Zahlen (Dezimal-, Bruchdarstellung, Prozentschreibweise).

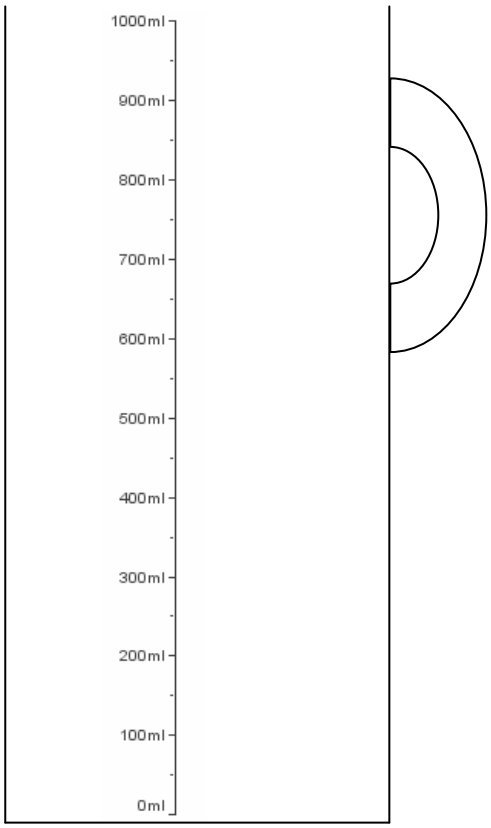
I1: Zahlen und Maße
H1: Darstellen, Modellbilden
K2: Herstellen von Verbindungen

Messbecher

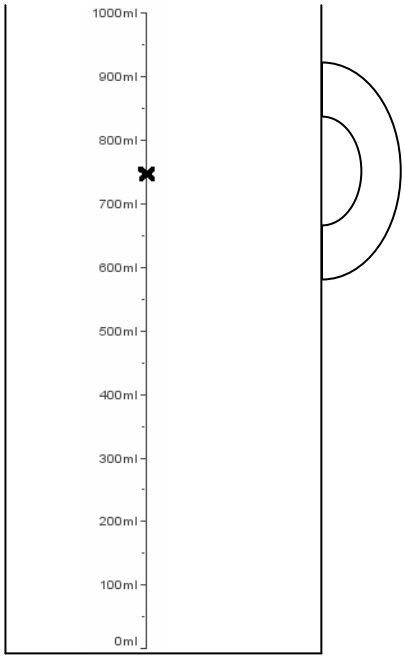
Für die Zubereitung eines Backteiges werden $\frac{3}{4}$ l Wasser benötigt.

Aufgabe: Die benötigte Wassermenge wird in einen Messbecher gefüllt. Markiere, wie hoch das Wasser im Messbecher steht!

Lösung:



Richtige Lösung:



Angesprochene Kompetenz: H1-I1-K2

H1: Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt auf der Übertragung einer symbolischen Darstellung einer Größe in eine grafische Darstellung (Messskala), also auf dem Wechsel zwischen zwei Darstellungsformen.

I1: Bei der Aufgabe geht es um (symbolische und grafische) Zahldarstellungen und um Maßeinheiten (für das Volumen).

K2: Die Aufgabe erfordert, zwischen Schreibweisen von Zahlen (Bruch-, Dezimaldarstellung) und zwischen Maßeinheiten (l, ml) zu wechseln, sowie eine Zahl grafisch darzustellen (als Punkt auf einer Messskala).

I1: Zahlen und Maße
H1: Darstellen, Modellbilden
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Zehnerpotenzen

Betragsmäßig sehr große oder sehr kleine Werte werden häufig mittels Zehnerpotenzen dargestellt (z. B. $6000000000000 = 6 \cdot 10^{12}$ oder $0{,}00000000006 = 6 \cdot 10^{-11}$).

Aufgabe: Welchen Vorteil bringt diese Schreibweise mit sich?

Lösung:

Richtige Lösung:

Vorteil: übersichtlichere Darstellung

Hinweise zur Lösung:

Als richtig zählen auch Antworten, die als Vorteil sinngemäß einen der folgenden Aspekte nennen:

- bei Berechnungen einfacher handhabbar
- Platz sparende Darstellung
- Größenvergleiche sind einfacher möglich

Angesprochene Kompetenz: H1-I1-K3

H1: Die Aufgabe fokussiert auf die (gedankliche) Auseinandersetzung mit Eigenschaften einer gängigen mathematischen Darstellung (Zehner-Potenzschreibweise).

I1: Bei der Darstellung handelt es sich um die Potenzschreibweise von sehr großen bzw. betragsmäßig sehr kleinen Zahlen.

K3: Die Aufgabe verlangt nicht, eine entsprechende Darstellung zu erstellen, sondern sie verlangt ein Nachdenken über Vorteile der Zehner-Potenzschreibweise. Die Vorteile sind verbal darzulegen.

I1: Zahlen und Maße
H2: Rechnen, Operieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Zinsen

Ein Kapital von € 8.500,- wird mit 3,5% jährlich verzinst.

Aufgabe: Berechne die Zinsen für ein Jahr!

Lösung: Die Zinsen für ein Jahr betragen € ……

Richtige Lösung:

Die Zinsen für ein Jahr betragen € 297,50.

Angesprochene Kompetenz: H2-I1-K1

H2: Die Aufgabe verlangt die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen, also die operative Ermittlung eines Wertes (Zinsen).

I1: Bei dem zu ermittelnden Wert handelt es sich um Zinsen.

K1: Zur Ermittlung der Lösung ist lediglich ein grundlegendes Verfahren, nämlich Berechnen eines Prozentwertes bzw. Berechnen von Zinsen, direkt anzuwenden.

I1: Zahlen und Maße
H2: Rechnen, Operieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Container

Für einen (quaderförmigen) Container hat man folgende Abmessungen ermittelt:
Länge 6m, Breite 2,5m, Höhe 2,5m.
Bei jeder dieser drei Messungen muss man mit einem Messfehler von 1% rechnen.

Aufgabe: Wie viele Liter fasst der Container?
(*Hinweis:* V_{Quader} = Länge · Breite · Höhe)

Lösung: Der Container fasst zwischen …..…… und ….…….. Liter.

Richtige Lösung:

Der Container fasst zwischen 36 386,2125 und 38 636,2875 Liter.

Hinweise zur Lösung:

Als richtig zu bewerten sind auch Lösungen, die auf ganze Liter gerundet wurden oder weniger als vier Nachkommastellen aufweisen. Bei Rundungen ist dabei die untere Intervallgrenze abzurunden, die obere Intervallgrenze aufzurunden.
Lösungen, die auf gängiges Runden (≥ 5 aufrunden, <5 abrunden) zurückgreifen, sind ebenso als richtig zu bewerten.

Angesprochene Kompetenz: H2-I1-K2

H2: Die Aufgabe verlangt die Durchführung elementarer Rechenoperationen mit konkreten Zahlen, die Berechnung von Prozentwerten und die Umrechnung von Maßeinheiten, also die operative Ermittlung von Werten (Intervall).

I1: Es geht um Messfehler, Prozentrechnung, die Multiplikation von Größen sowie um Maßeinheiten (Volumen).

K2: Zur Ermittlung der Lösung sind Kenntnisse über die operative Ermittlung von Fehlerschranken (Prozentrechnung) und den Umgang damit erforderlich. Weiters werden elementare Kenntnisse über die Multiplikation von rationalen Zahlen sowie die Umwandlung von Maßeinheiten (m^3, l) benötigt.

I1: Zahlen und Maße
H2: Rechnen, Operieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Verschiedene Lösungswege

Die Klasse 2C hat folgende Aufgabe zu lösen:

$$986 - 58 \cdot 14 - 264 : 21 =$$

Florentina, Marianne, Fatima und Anita wählen unterschiedliche Wege zur Berechnung des Ergebnisses.

Aufgabe: Entscheide für jeden der vier beschriebenen Lösungswege, ob er zum richtigen Ergebnis führt oder nicht!

Lösung:

			richtig	**nicht richtig**
A	*Florentina:*	Ich rechne zuerst 58 ·14 und dann 264:21. Dann zähle ich diese beiden Ergebnisse zusammen. Diese Summe ziehe ich von 986 ab.		
B	*Marianne:*	Ich ziehe von 986 zuerst 58 ab und multipliziere dieses Ergebnis mit 14. Davon ziehe ich dann 264 ab. Dieses Ergebnis dividiere ich durch 21.		
C	*Fatima:*	Ich multipliziere zuerst 58 mit 14. Von diesem Ergebnis ziehe ich den Quotienten von 264 und 21 ab. Dieses Ergebnis ziehe ich von 986 ab.		
D	*Anita:*	Ich rechne zuerst 58 ·14 und ziehe das Ergebnis dieser Multiplikation von 986 ab. Von diesem Ergebnis ziehe ich das Ergebnis der Division von 264 und 21 ab.		

Richtige Lösung:

Die Lösungswege A und D führen zum richtigen Ergebnis, bei B und C ist dies nicht der Fall.

Angesprochene Kompetenz: H2-I1-K3

H2: Der Kern der Aufgabe liegt auf der korrekten Anwendung von Rechenregeln und Rechengesetzen für Grundrechenoperationen bei der Planung und Durchführung von Rechenabläufen.

I1: Es geht um Zahlen, Rechenoperationen und Rechenregeln.

K3: Die Aufgabe erfordert nicht die selbständige Durchführung von Rechenoperationen, sondern ein Nachdenken darüber, ob in verbal beschriebenen Lösungswegen mathematische Vorschriften (Hierarchie der Rechenoperationen) eingehalten bzw. grundlegende Rechenregeln (für Grundrechenoperationen) korrekt angewendet werden. Entsprechende Entscheidungen sind erforderlich.

I1: Zahlen und Maße
H3: Interpretieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Busfahrplan

An der Universität Klagenfurt findet einmal im Jahr ein „Tag der Forschung“ für Schülerinnen und Schüler statt. Du möchtest mit deiner Klasse in diesem Jahr diesen „Tag der Forschung“ besuchen. Dazu müsst ihr in Klagenfurt mit dem Bus vom Hauptbahnhof zur Universität fahren.
Um in Klagenfurt vom Hauptbahnhof zur Universität zu kommen, muss man am Heiligengeistplatz umsteigen. Die Fahrzeiten der Busse sind in untenstehender Tabelle angegeben.

Aufgabe: Ihr kommt um 8.30 Uhr zur Bushaltestelle am Hauptbahnhof.
Wann könnt ihr frühestens an der Haltestelle „Universität“ ankommen?

Montag–Freitag **Linie 40 41**

STW	Uhr	5						6										7								8–17								18	
	Linie	40	40	40	40	41	40	40	40	41	40	40	41	40	40	40	41	40	41	40	41	40	41	40	41	40	41	40	41	40	41	40	41	40	41
	Index																																		
Hauptbahnhof	ab	04	14	34	44	52	59	07	14	22	29	37	42	44	52	59	07	14	22	29	37	44	52	59	07	14	22	29	37	44	52	59	07	14	
Wirtschaftskammer		05	15	35	45	53	00	08	15	23	30	38	43	45	53	00	08	15	23	30	38	45	53	00	08	15	23	30	38	45	53	00	08	15	
Landesregierung		06	16	36	46	54	01	09	16	24	31	39	44	46	54	01	09	16	24	31	39	46	54	01	09	16	24	31	39	46	54	01	09	16	
Domplatz		07	17	37	47	55	03	11	18	26	33	41	46	48	56	03	11	18	26	33	41	48	56	03	11	18	26	33	41	48	56	03	11	18	
Heiligengeistplatz Stand 12	an	08	18	38	48	56	05	13	20	28	35	43	48	50	58	05	13	20	28	35	43	50	58	05	13	20	28	35	43	50	58	05	13	20	
Heiligengeistplatz Stand 12	ab	10	20	40	50	58	07	15	22	30	37	45	50	52	00	07	15	22	30	37	45	52	00	07	15	22	30	37	45	52	00	07	15	22	
Heuplatz		11	21	41	51	59	08	16	23	31	38	46	51	53	01	08	16	23	31	38	46	53	01	08	16	23	31	38	46	53	01	08	16	23	
Stadtwerke		12	22	42	52	00	09	17	24	32	39	47	52	54	02	09	17	24	32	39	47	54	02	09	17	24	32	39	47	54	02	09	17	24	
Landeskrankenhaus		14	24	44	54	02	11	19	26	34	41	49	54	56	04	11	19	26	34	41	49	56	04	11	19	26	34	41	49	56	04	11	19	26	

Montag–Freitag **Linie 10 11 12**

STW	Uhr	5	6				7				8						9–11						12–13						14–15						16–18	
	Linie	10	10	10	10		12	12	10	12	12	10	11	12	10	10	12	10	11	12	10	10	12	10	10	12	10	10	12	10	11	12	10	10	12	10
	Index						V																													
Heiligengeistplatz Stand 2	ab	40	00	25	55		10	20	40	50	00	10	20	30	40	50	00	10	20	30	40	50	00	10	20	30	40	50	00	10	20	30	40	50	00	10
Sponheimerstrasse		41	01	26	56		11	21	41	51	01	11		31	41	51	01	11		31	41	51	01	11	21	31	41	51	01	11		31	41	51	01	11
Jergitschsteg		42	02	27	57		12	22	42	52	02	12		32	42	52	02	12		32	42	52	02	12	22	32	42	52	02	12		32	42	52	02	12
Rizzibrücke		43	03	28	58		13	23	43	53	03	13		33	43	53	03	13		33	43	53	03	13	23	33	43	53	03	13		33	43	53	03	13
Steinerne Brücke		44	04	29	59		14	24	44	54	04	14		34	44	54	04	14		34	44	54	04	14	24	34	44	54	04	14		34	44	54	04	14
Heinzelsteg		45	05	30	00				45			15			45	55		15			45	55		15	25		45	55		15			45	55		15
Neckheimgasse		46	06	31	01				46			16			46	56		16			46	56		16	26		46	56		16			46	56		16
Lerchenfeldstrasse													23						23												23					
Rizzistrasse													24						24												24					
Anderluhstrasse													25						25												25					
Stifterstrasse													26						26												26					
St. Martin													27						27												27					
Kohldorfer Strasse													28						28												28					
Steinerne Brücke																																				
Luegerstrasse							15	25		55	05			35			05			35			05			35			05			35			05	
Ginzkeygasse							16	26		56	06			36			06			36			06			36			06			36			06	
Jugendgästehaus							17	28		58	08			38			08			38			08			38			08			38			08	
Universität							18	29		59	09			39			09			39			09			39			09			39			09	
Minimundus		47	07	32	02				48			18	30		48	58		18	30		48	58		18	28		48	58		18	30		48	58		18
Schiffsanlegestelle		48	08	33	03	21	32	50	02	12	20	32	42	50	00	12	20	32	42	50	00	12	20	30	42	50	00	12	20	32	42	50	00	12	20
Strandbad	an	49	09	34	04	22	34	52	04	14	22	34	44	52	02	14	22	34	44	52	02	14	22	32	44	52	02	14	22	34	44	52	02	14	22

Lösung: Wir können frühestens um ……. an der Haltestelle „Universität“ ankommen.

Richtige Lösung:

Wir können frühestens um 9.09 Uhr an der Haltestelle „Universität“ ankommen.

Angesprochene Kompetenz: H3-I1-K1

H3: Die Aufgabe verlangt das Ablesen bestimmter numerischer Werte aus einer Tabelle (Busfahrplan) sowie das Deuten dieser Werte im gegebenen Kontext (Abfahrts- und Ankunftszeiten).

I1: In der Aufgabe geht es um Zeitangaben, die in Stunden und Minuten gegeben sind.

K1: Zur Ermittlung des Ergebnisses ist das (wiederholte) Ablesen von Werten aus einer Tabelle sowie ein Aufeinanderbeziehen der Werte notwendig. Es handelt sich dabei um die direkte Anwendung grundlegender elementarer Fertigkeiten.

I1: Zahlen und Maße
H3: Interpretieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Rechnung in einem Restaurant

Vier Freunde essen in einem Restaurant. Die Rechnung in Höhe von Euro 80,- teilen sie untereinander auf.

Aufgabe: Max, der älteste der vier Freunde, bezahlt 20 + 60:4 = 35 Euro, die anderen drei teilen den Rest gleichmäßig untereinander auf.
Erfinde eine Geschichte, die zu dieser Aufteilung der Rechnung passt!

Lösung:

Richtige Lösung:

Max lädt seine Freunde offenbar auf einen Teil der Konsumation (z. B. die Getränke) in Höhe von € 20,- ein, den Rest von € 60,- teilen die vier gleichmäßig untereinander auf. Somit hat jeder der drei € 15,- zu bezahlen, Max jedoch € 35,-.

Hinweise zur Lösung:

Als richtig zu bewerten sind auch andere, der Rechnung angemessene Interpretationen, z. B. dass Max um € 20,- mehr konsumiert hat als alle anderen o. Ä.
Die Deutung der Rechnung sollte aber jedenfalls im Kontext erfolgen; eine Antwort, die sich nur auf die Beschreibung der Rechenoperationen bezieht, wie etwa „Max zahlt € 20,- und ein Viertel von € 60,-“ wäre nicht ausreichend.

Angesprochene Kompetenz: H3-I1-K2

H3: Die Aufgabe verlangt das Erkennen von Zusammenhängen und Strukturen in einem Term sowie ein Deuten dieser in einem vorgegebenen Kontext.

I1: Bei dem zu interpretierenden Term handelt es sich um einen Zahlenterm.

K2: Die Aufgabe erfordert die Interpretation einer Addition und einer Division (als gleichmäßige Verteilung) in einem vorgegebenen Kontext. Darüber hinaus ist ein Deuten der Kombination der beiden Rechenoperationen im vorliegenden Kontext erforderlich.

I1: Zahlen und Maße
H3: Interpretieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Bildungsstand der Österreicherinnen und Österreicher

In einer Tageszeitung findet man folgende Schlagzeile:

„3/4 aller Österreicher(innen) haben keine Matura“

Aufgabe: Welche der folgenden Aussagen gibt die Bedeutung der Aussage der Schlagzeile sinngemäß richtig wieder, welche nicht?

Lösung:

		richtig	**nicht richtig**
A	Jede(r) dritte Österreicher(in) hat keine Matura.		
B	25% aller Österreicher(innen) haben Matura.		
C	Das Verhältnis der Österreicher(innen) mit Matura zu jenen ohne Matura ist 3 : 4.		
D	Im Durchschnitt hat eine(r) von vier Österreicher(inne)n Matura.		

Richtige Lösung:

Die Aussagen B und D sind zutreffend, A und C sind nicht zutreffend.

Angesprochene Kompetenz: H3-I1-K3

H3: Die Aufgabe behandelt verschiedene Deutungen eines vorgegebenen (kontextbezogenen) mathematischen Sachverhalts und verlangt das Erkennen von zutreffenden und unzutreffenden Interpretationen.

I1: Bei den Interpretationen spielen Deutungen einer Bruchzahl eine zentrale Rolle.

K3: Die Aufgabe erfordert Nachdenken über die mathematische Äquivalenz von jeweils zwei vorgegebenen kontextbezogenen Aussagen (Interpretationen) und entsprechende Bewertungen.

I1: Zahlen und Maße
H4: Argumentieren, Begründen
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Potenzen

Gegeben ist folgende Aussage: $\frac{5^5}{5^3} = 5^2$

Aufgabe: Zeige, dass obige Aussage gilt!

Lösung:

Richtige Lösung:

$$\frac{5^5}{5^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5 \cdot 5} = 5^2$$

Hinweise zur Lösung:

Der Nachweis in der angegebenen Lösung wird durch Rückgriff auf die Definition von Potenzen erbracht.
Der Übergang von Schritt 2 auf 3 erfordert ein Kürzen von Brüchen.

Andere, ebenso als richtig zu wertende Lösungen:

Nachweis durch Ausrechnen und Anwendung der Definition: $\frac{5^5}{5^3} = \frac{3125}{125} = 25 = 5^2$

Nachweis greift auf Rechenregeln für Potenzen zurück: $\frac{5^5}{5^3} = 5^{5-3} = 5^2$

Angesprochene Kompetenz: H4-I1-K1

H4: Die Aufgabe verlangt die Angabe einer mathematischen Argumentation(skette).

I1: Es geht in dieser Aufgabe um Potenzen.

K1: Die Aufgabe kann durch unmittelbares Anwenden einer elementaren Potenzrechenregel, durch direktes Anwenden der Definition von Potenzen oder durch Ausrechnen und Anwenden der Definition von Potenzen gelöst werden.

I1: Zahlen und Maße
H4: Argumentieren, Begründen
K2: Herstellen von Verbindungen

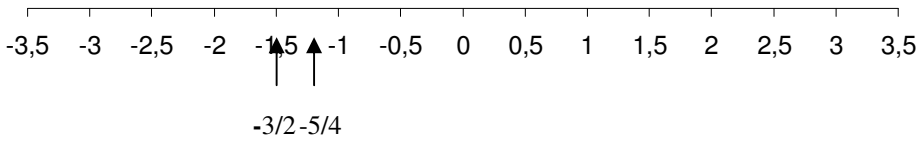
Größenvergleich

Gegeben sind die beiden Zahlen $-\frac{5}{4}$ und $-\frac{3}{2}$.

Aufgabe: Begründe in Worten anhand einer Darstellung der beiden Zahlen auf der Zahlengeraden, warum $-\frac{5}{4}$ größer ist als $-\frac{3}{2}$!

Lösung:

Richtige Lösung:



$-\frac{5}{4}$ ist größer als $-\frac{3}{2}$, da $-\frac{5}{4}$ auf der Zahlengerade rechts von $-\frac{3}{2}$ liegt.

Hinweise zur Lösung:

Eine richtige Lösung muss beide Punkte umfassen:

1. korrekte Darstellung der beiden Zahlen auf der Zahlengerade,
2. verbale Formulierung einer Begründung, die sich auf die Lage der Punkte auf der Zahlengerade bezieht.

Angesprochene Kompetenz: H4-I1-K2

H4: Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt in der Angabe einer mathematischen Argumentation, die auf eine mathematische Darstellung (Zahlengerade) Bezug nimmt.

I1: Es geht in dieser Aufgabe um den Größenvergleich und eine grafische Zahldarstellung (Punkte auf einer Zahlengeraden) zweier rationaler Zahlen.

K2: Die Lösung der Aufgabe verlangt einen Darstellungswechsel (eine grafische Darstellung (Zahlengerade) einer arithmetisch/symbolisch gegebenen Situation) sowie das Erkennen von mathematischen Zusammenhängen (Lage der Punkte zueinander) in der grafischen Darstellung. Diese müssen im mathematischen Kontext gedeutet (Größenvergleich) und zur Formulierung einer mathematischen Begründung verwendet werden. Diese ist verbal darzulegen.

I1: Zahlen und Maße
H4: Argumentieren, Begründen
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Irrationale Zahlen

Britta erzählt ihrer Freundin: „$\sqrt{2}$ ist keine rationale, sondern eine irrationale Zahl."
Ihre Freundin möchte nun wissen, warum $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Aufgabe: Welche der folgenden Argumente Brittas sind zutreffend, welche nicht?

Lösung:

		trifft zu	**trifft nicht zu**
A	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, weil die Wurzel einer Zahl nie rational ist.		
B	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, weil man $\sqrt{2}$ nicht als Bruch zweier natürlicher Zahlen darstellen kann.		
C	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, weil man $\sqrt{2}$ nicht am Zahlenstrahl darstellen kann.		
D	$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, weil $\sqrt{2}$ in Dezimalschreibweise unendlich, aber nicht periodisch ist.		

Richtige Lösung:

Die Argumente B und D sind inhaltlich zutreffend (wenn auch keine ausreichende Begründung der Irrationalität), die Argumente A und C sind nicht zutreffend.

Angesprochene Kompetenz: H4-I1-K3

H4: In dieser Aufgabe geht es um das Erkennen von mathematisch zutreffenden und unzutreffenden Argumenten.

I1: Im Mittelpunkt der Aufgabe stehen irrationale Zahlen und deren Eigenschaften.

K3: Die Aufgabe verlangt Nachdenken über die Angemessenheit vorgegebener mathematischer Argumente.

Variable, funktionale Abhängigkeiten

Bildungstheoretische Orientierung

Lebensvorbereitung

Neben dem Interpretieren von einfachen Gleichungen/Formeln und Ungleichungen zählt auch das elementare Umformen einfacher Formeln zur Lebensvorbereitung, begegnen einem doch in vielen Situationen Formeln, die erst durch geeignete Umformungen auf die benötigte Form gebracht werden müssen. Aktiv verfügbar müssen Gleichungen und Ungleichungen beim Darstellen einfacher Zusammenhänge sein; dabei präzisiert die mathematische Schreibweise Formulierungen der Alltagssprache wie „gleich viel“, „höchstens“, „weniger als“ etc. Um Auswirkungen von Größenänderungen abschätzen zu können, müssen Formeln auch funktional betrachtet werden können.

Funktionsgraphen findet man häufig in verschiedensten Medien. Das „Lesen können“ solcher Graphen, und zwar sowohl das Ablesen von Detailinformationen als auch das Erfassen eines globalen Verlaufs, ist dabei eine unverzichtbare Fähigkeit. Vielen Situationen liegt – manchmal nicht auf den ersten Blick erkennbar – die Struktur der linearen Funktion zugrunde. Um sich ein Bild machen zu können, muss diese Struktur erkannt werden (Modellbildung). Wer Berechnungen anstellen kann, wird manche Entscheidung adäquater treffen können; verständliche Argumentationen erfordern geeignete Darstellungen (Tabelle, Gleichung, Graph).

Direkte und indirekte Proportionalität liegen als Annahmen vielen Situationen unseres Alltags zugrunde. Sowohl das sichere Anwenden dieser Struktur in Berechnungen bzw. Abschätzungen als auch ein kritischer Zugang zu dieser Art von Modellierung sind wünschenswert – die mathematische Darstellung hilft sowohl beim kritischen Hinterfragen als auch beim Argumentieren. Ähnliches gilt für die Unterscheidung zwischen linearen und (einfachen) nichtlinearen Zusammenhängen (z. B. Wachstumsprozesse).

Anschlussfähigkeit

Die Darstellung von Beziehungen in Form von Termen, Gleichungen und Ungleichungen ist grundlegend für die elementare Algebra. Die Elementarumformungen von Gleichungen/ Formeln und Ungleichungen sowie das Lösen von linearen Gleichungen und Gleichungssystemen zählen zu den wichtigsten Routinen der elementaren Algebra.

Beim Modellieren funktionaler Abhängigkeiten wird der Funktionsbegriff vorbereitet; einfache Zusammenhänge müssen in Form einer Funktionsgleichung symbolisch dargestellt werden. Sowohl das Lesen als auch das Anfertigen von Funktionsgraphen zählen zu den Grundtätigkeiten bei den Funktionen. Aber auch das Interpretieren einer Geraden als Graph einer linearen Funktion und das Interpretieren der beiden charakteristischen Parameter im jeweiligen Kontext gehört zum Grundwissen bei Funktionen. (Proto-)Typische Anwendungen der linearen Funktion sollten vertraut sein. Das Erfassen funktionaler Beziehungen in Formeln, insbesondere das Unterscheiden (und Kombinieren) von linearen und einfachen nichtlinearen Beziehungen, sind Grundtätigkeiten der Funktionenanalyse.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H1: Darstellen, Modellbilden
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Taschengeld

Max erhält um fünf Euro mehr Taschengeld als Franz.

Aufgabe: Stelle dies durch eine Gleichung dar, in der du die folgenden Variablen verwendest:

m.....Taschengeldbetrag in Euro, den Max erhält
f.....Taschengeldbetrag in Euro, den Franz erhält

Lösung: ……..

Richtige Lösung:

$m = f + 5$

Hinweise zur Lösung:

Auch alle äquivalenten Gleichungen sind als richtige Lösungen zu werten:

$f + 5 = m$ oder $m - 5 = f$ oder $f = m - 5$ oder $m - f = 5$ oder $5 = m - f$

Angesprochene Kompetenz: H1-I2-K1

H1: Die Aufgabe verlangt die Übertragung eines verbal dargestellten Zusammenhangs in eine andere Darstellungsform (Gleichung). Insbesondere ist dabei eine Modellbildung, nämlich die Übertragung einer beschriebenen Ungleichheit in eine fiktive Gleichheit, die für die Gleichungsdarstellung benötigt wird, erforderlich.

I2: Die verlangte Darstellungsform ist eine lineare Gleichung mit zwei Variablen.

K1: Die Aufgabe verlangt die Erfassung der Bedeutung von „mehr“ und die Darstellung dieser Beziehung in Form einer Gleichung; diese Tätigkeit ist elementar.

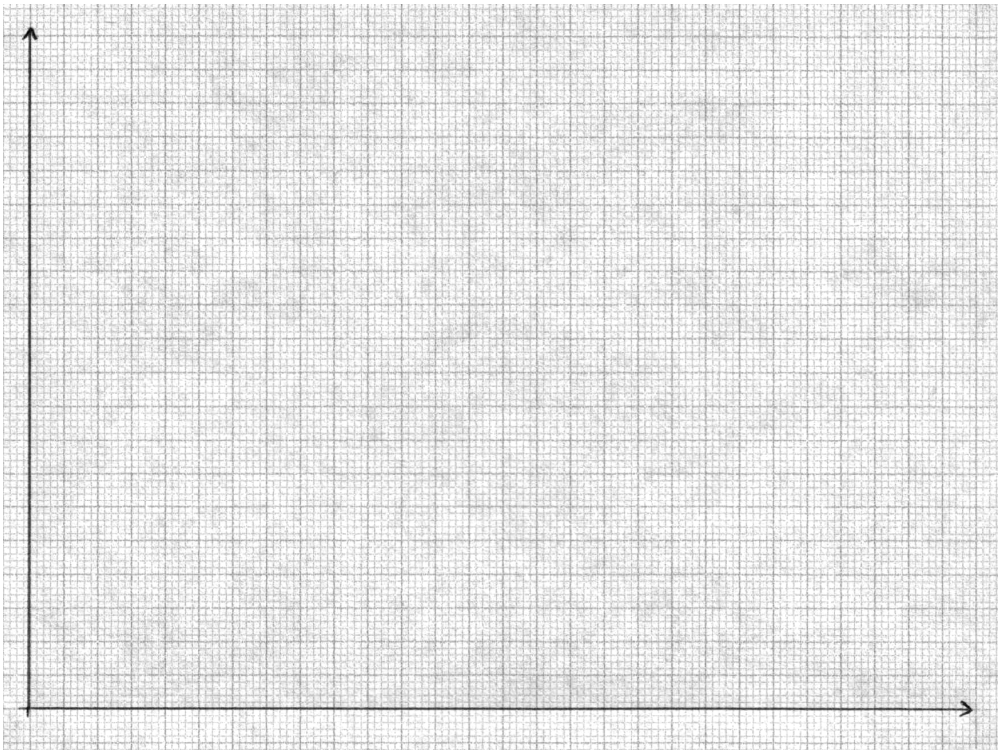
I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H1: Darstellen, Modellbilden
K2: Herstellen von Verbindungen

Stromtarif

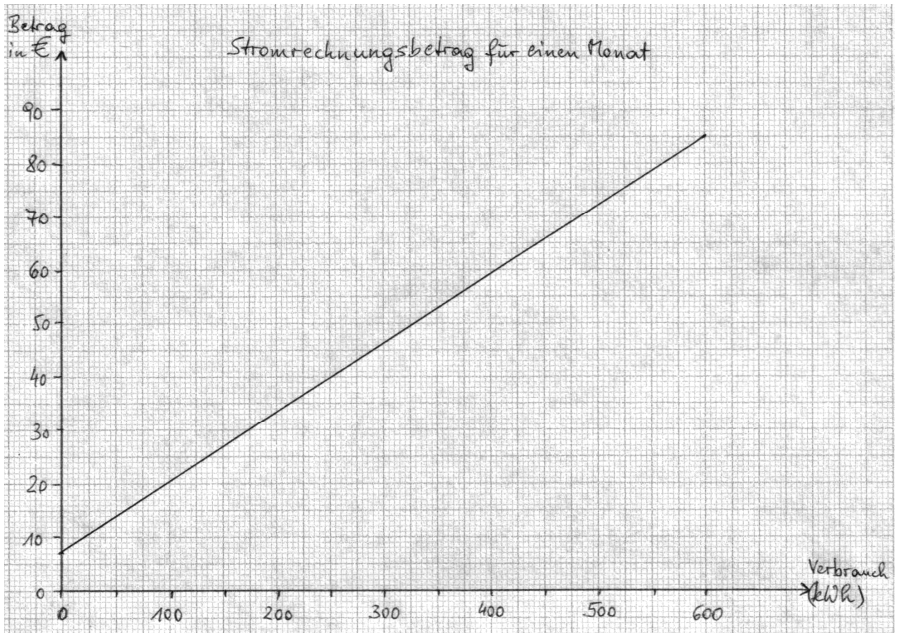
Eine Stromgesellschaft informiert über einen neuen Haushaltstarif: Die monatliche Grundgebühr beträgt 7 Euro, die Verbrauchsgebühr beträgt 13 Cent pro Kilowattstunde.

Aufgabe: Erstelle eine Grafik, aus der man den Rechnungsbetrag für einen Monat bei unterschiedlichem Stromverbrauch (bis zu 600 Kilowattstunden) ablesen kann!

Lösung:



Richtige Lösung:



Hinweise zur Lösung:

Die Skalierung kann anders gewählt werden, aber die Äquidistanz der Einheiten muss erfüllt und der relevante Wertebereich sichtbar sein. Es können auch mehrere Punkte sichtbar sein, der Graph muss aber jedenfalls eindeutig eine Gerade darstellen. Kontrollpunkte könnten etwa (100 kWh|20 €) und (600 kWh|85 €) sein.

Angesprochene Kompetenz: H1-I2-K2

H1: Die Aufgabe verlangt zunächst die Tätigkeit des Modellbildens, wenn dem „alltagssprachlich“ formulierten Text die problemrelevanten mathematischen Zusammenhänge als Struktur bestimmend (Grundgebühr als Fixbetrag, Verbrauchsgebühr als von der Strommenge abhängige variable Gebühr) entnommen werden müssen, danach die Übertragung in die Darstellungsform Graph.

I2: Lineare Tarife sind wichtige Anwendungen der linearen Funktion; bei der verlangten Darstellungsform (Graph) handelt es sich um eine klassische Darstellungsform für Funktionen.

K2: Die Aufgabe verlangt die Übertragung der gefundenen Struktur in die Darstellungsform des geforderten Graphen. Dafür ist jedenfalls die Vernetzung des Wissens, dass bereits zwei Punkte eine Gerade festlegen, mit der Erkenntnis der Linearität dieser Situation erforderlich. Zusätzlich zu Berechnungen sind Überlegungen über eine angemessene Skalierung und über einen sinnvollen Skalenausschnitt anzustellen.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H1: Darstellen, Modellbilden
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Straßenbau

Die Lehrerin legt folgende Aufgabe vor:

Ein Straßenstück soll gebaut werden. Erste Berechnungen für vier Bagger ergeben, dass die Fertigstellung dann 24 Tage dauern wird.
Nun können aber statt der vier Bagger sogar acht Bagger eingesetzt werden.
Wenn man wissen will, wie lange die Fertigstellung nun dauern wird, wie kann man da überlegen?

Viele Schüler(innen) melden sich zu Wort.

Aufgabe: Welche der folgenden Überlegungen ist für dich überzeugend?

Lösung: Kreuze entsprechend an:

Die Überlegung ist	**überzeugend**	**nicht überzeugend**
Anna: Doppelt so viele Bagger arbeiten doppelt so viel und doppelt so lange; also 48 Tage.		
Bernd: Jeder zusätzliche Bagger bringt gleich viele Tage Ersparnis, nämlich 4 Tage. Also dauert die Arbeit für vier zusätzliche Bagger 24 minus 4 mal 4 Tage, also 8 Tage.		
Chris: Jeder Bagger arbeitet etwa gleich viel; doppelt so viele Bagger brauchen nur etwa halb so viel Zeit für dieselbe Arbeit. Wenn eine ungefähre Abschätzung reicht: etwa 12 Tage.		

Richtige Lösung:

Die Überlegung von Chris ist überzeugend, die Überlegungen von Anna und Bernd sind nicht überzeugend.

Angesprochene Kompetenz: H1-I2-K3

H1: Aus den Formulierungen der Schüler(innen) sind die unterschiedlichen Modellbildungen, die ihren Überlegungen zu Grunde liegen, zu erkennen und deren Eignung bzw. Nicht-Eignung in diesem Kontext zu bewerten.

I2: Einer Überlegung liegt eine Modellbildung mittels linearer Funktion zugrunde, zwei Überlegungen bedienen sich in der Modellbildung der direkten bzw. indirekten Proportionalität.

K3: Die Aufgabe verlangt Nachdenken über unterschiedliche Modellannahmen, Vergleichen von Alternativen bezüglich ihrer Angemessenheit im Kontext und auch Mitbedenken der unterschiedlichen Entscheidungen, zu denen die Modellbildungen führen.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H2: Rechnen, Operieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Gleichungssystem

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x + 2\cdot y &= 12 \\ 2\cdot x + 5\cdot y &= 29 \end{aligned}$$

Aufgabe: Löse dieses Gleichungssystem!

Lösung: x = …… y = ……

Richtige Lösung:

$x = 2$ $y = 5$

Angesprochene Kompetenz: H2-I2-K1

H2: Die Aufgabe verlangt operativ das Finden der gemeinsamen Lösung zweier linearer Gleichungen in zwei Variablen, also das Lösen eines linearen Gleichungssystems.

I2: Die Objekte, mit denen operiert wird, sind Gleichungen.

K1: Die Aufgabe verlangt das Planen eines Lösungswegs sowie das Lösen des Gleichungssystems, was zusammen als ein Lösungsmodul angesehen wird. (Eine Bearbeitung dieser Aufgabe mit CAS erfordert lediglich die Anwendung eines Befehles.)

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H2: Rechnen, Operieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Frequenz

Die Frequenz einer (Radio-)Welle kann man mit folgender Formel berechnen:

$$f = \frac{c}{l}$$

f … Frequenz in Hertz (Schwingungen pro s)
c ... Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle in m/s
l … Wellenlänge in m

Die Angabe „Ö3 auf 99,9 UKW“ bedeutet, dass der Radiosender Ö3 mit einer Frequenz von 99,9 MHz sendet, das sind 99,9 Millionen Hertz. Radiowellen haben eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von 300 000 km/s.

Aufgabe: Wie groß ist die Wellenlänge dieser Radiowelle?

Lösung: l = ……..…

Richtige Lösung:

$l = 3{,}\dot{0}0\dot{3}\,m$

Hinweise zur Lösung:

Die Rundung auf ganze Meter wird als richtige Lösung gewertet.

Angesprochene Kompetenz: H2-I2-K2

H2: Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt auf dem operativen Umformen einer Formel.

I2: Die Darstellungen in der Angabe und im Ergebnis sind Formeln.

K2: Neben dem Umformen der Formel ist auch das Einsetzen von Zahlenwerten für die Variablen sowie das Berechnen der geforderten Größe, vor allem aber das Umrechnen von Maßangaben erforderlich.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H2: Rechnen, Operieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Zylinder

Das Volumen V eines Zylinders kann man nach folgender Formel berechnen:

$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

r ..... Radius des Basiskreises
h ..... Höhe des Zylinders

Aufgabe: Wenn die Höhe h drei Mal so lang wird und der Radius r zwei Mal so lang, wie verändert sich dadurch das Volumen V?

Lösung:

- ☐ Das Volumen V misst dann zwei Mal so viel.
- ☐ Das Volumen V misst dann drei Mal so viel.
- ☐ Das Volumen V misst dann vier Mal so viel.
- ☐ Das Volumen V misst dann sechs Mal so viel.
- ☐ Das Volumen V misst dann neun Mal so viel.
- ☐ Das Volumen V misst dann zwölf Mal so viel.

Richtige Lösung:

Das Volumen V misst dann zwölf Mal so viel.

Angesprochene Kompetenz: H2-I2-K3

H2: Die Aufgabe verlangt (gedankliches) Operieren in der Formel, es können Werte eingesetzt bzw. Variable substituiert werden.

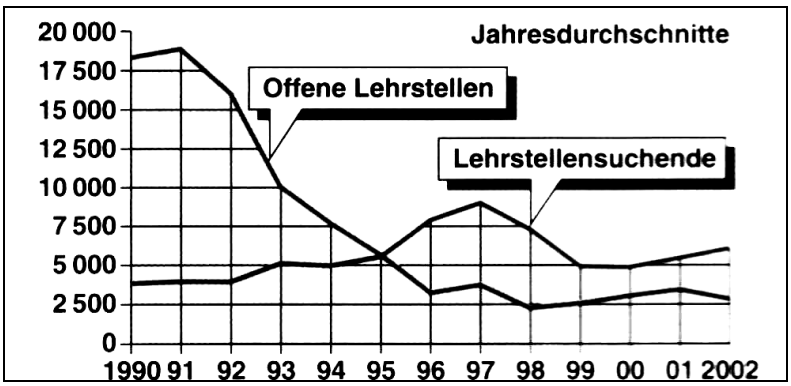
I2: Es geht nicht um geometrische Sachverhalte, sondern um das Variieren von Größen einer Formel und um ein funktionales Betrachten der Abhängigkeiten, die die Formel beschreibt.

K3: Die Bewältigung der Aufgabe verlangt Nachdenken über die Wirkung von Größenänderungen in der Formel, insbesondere das Kombinieren zweier Wirkungen.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H3: Interpretieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Lehrstellensuchende

Aus der Grafik kann man entnehmen, wie sich in Österreich die Zahlen der Lehrstellensuchenden und der offenen Lehrstellen entwickelt haben.



Aufgabe: Wie groß ist die höchste Zahl an Lehrstellensuchenden laut dieser Grafik?

Lösung: Es sind ca. …….. Lehrstellensuchende.

Richtige Lösung:

Es sind ca. 9000 Lehrstellensuchende.

Hinweise zur Lösung:

Eine Ableseungenauigkeit von ± 500 ist tolerierbar: Angaben im Intervall [8500; 9500] sind als richtig zu werten.

Angesprochene Kompetenz: H3-I2-K1

H3: Die Aufgabe erfordert die Einsicht, dass zur Lösung nur eine „Kurve“ benötigt wird, sie verlangt dann das Ablesen eines Funktionswertes aus einer Grafik und das Deuten dieser Information im Kontext der Aufgabe.

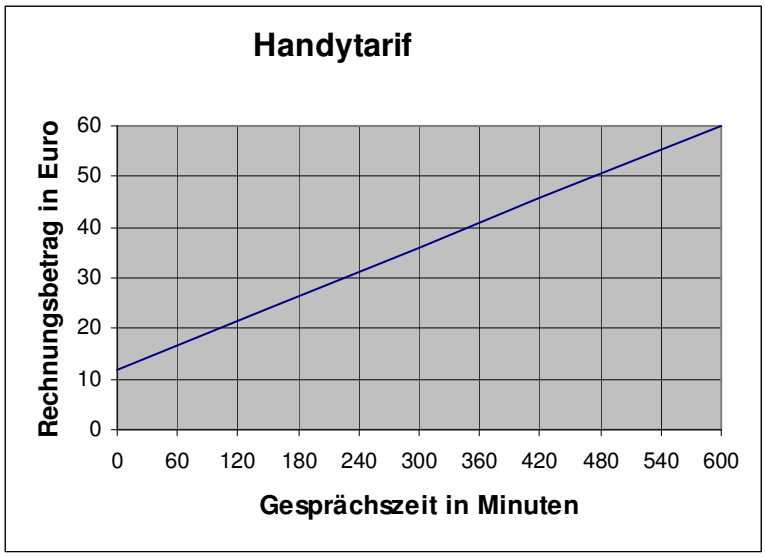
I2: Die Darstellung der Entwicklung von Arbeitsmarktdaten in der Angabe kann als Graph einer Funktion aufgefasst werden.

K1: Das Ablesen des Funktionswertes eines Hochpunktes aus einer Grafik und das Deuten dieses Wertes im Kontext ist elementar, wenn die Achsen beschriftet sind.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H3: Interpretieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Handytarif

Eine Telefongesellschaft bietet einen neuen Handytarif an. Man kann den Rechnungsbetrag für einen Monat aus untenstehender Grafik (ungefähr) ablesen.



Aufgabe: Wie viel beträgt die Gesprächsgebühr pro Minute?

Lösung: Die Gesprächsgebühr beträgt € …… pro Minute.

Richtige Lösung:

Die Gesprächsgebühr beträgt € 0,08 pro Minute.

Hinweise zur Lösung:

Man erkennt anhand der Grafik, dass die Grundgebühr ca. € 12,- beträgt, die Gesprächsgebühr für 600 Minuten dann 60 – 12 = 48 Euro. Daraus ergibt sich eine Gesprächsgebühr von 48 : 600 = 0,08 Euro pro Minute.
Kleine Ablesefehler sind zu tolerieren: Das (Rechen-)Ergebnis gilt als richtig, wenn es – auf zwei Nachkommastellen gerundet – mit dem angegebenen Ergebnis übereinstimmt.

Angesprochene Kompetenz: H3-I2-K2

H3: Die Aufgabe verlangt die Interpretation der „Gesprächsgebühr pro Minute“ als Steigung der gezeichneten Geraden; dafür ist das Ablesen von zwei Wertepaaren aus der grafischen Darstellung eines mathematischen Zusammenhangs und deren Deutung erforderlich.

I2: Die Darstellung in der Angabe ist der Graph einer linearen Funktion.

K2: Für die Identifizierung der Gesprächsgebühr müssen zumindest zwei Punktinformationen kombiniert und Berechnungen (Differenz und Quotient) angestellt werden.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H3: Interpretieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Mädchen in der Überzahl

In einer Schule sind die Mädchen deutlich in der Überzahl. In jeder einzelnen Klasse gilt sogar:

$M > B \cdot 2$ M……Anzahl der Mädchen
B…….Anzahl der Buben

Aufgabe: Wenn in einer Klasse 8 Buben sind, welche der folgenden Aussagen über die Anzahl der Mädchen dieser Klasse wird durch die Ungleichung ausgedrückt?

Lösung:

- ☐ Es sind mindestens 15.
- ☐ Es sind höchstens 15.
- ☐ Es sind mindestens 16.
- ☐ Es sind höchstens 16.
- ☐ Es sind mindestens 17.
- ☐ Es sind höchstens 17.

Richtige Lösung:

Es sind mindestens 17.

Angesprochene Kompetenz: H3-I2-K3

H3: Die Aufgabe verlangt das Einsetzen eines Wertes für eine Variable und das Ablesen einer Information aus einer Ungleichung, vor allem aber das verbal richtige Deuten dieser Informationen im Kontext der Aufgabe.

I2: Die Darstellung in der Angabe ist eine Ungleichung.

K3: Das Deuten einer einfachen Ungleichung wäre elementar; als Antworten werden hier aber keine Interpretationen wie „größer als“ bzw. „mehr als“ angeboten. Vielmehr sind Formulierungen mit „höchstens“ bzw. „mindestens“ gegeben, die allerdings nur für $\leq$ bzw. $\geq$ direkte „Entsprechungen“ sind. Die geforderte Leistung besteht also im Deuten von Formulierungen bzw. im Verändern der Ungleichung. Es gilt hier also nachzudenken über die Beziehungen unterschiedlicher verbaler Interpretationen, insbesondere über das Verhältnis von „größer als“ zu „mindestens“.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H4: Argumentieren, Begründen
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Binomische Formel

Bei der Herleitung einer „binomischen Formel“ werden viele Umformungsschritte benötigt, einen davon sieht man hier:

$$\ldots = a\cdot a + b\cdot a + a\cdot b + b\cdot b \;=\; a\cdot a + a\cdot b + a\cdot b + b\cdot b = \ldots$$

***Aufgabe*:** Warum ist dieser Umformungsschritt erlaubt?

Lösung:

Richtige Lösung:

Es gilt das Kommutativgesetz der Multiplikation.

Hinweise zur Lösung:

Auch Formulierungen wie etwa „Es gilt das Vertauschungsgesetz der Multiplikation“ oder „Bei einer Multiplikation kommt es nicht auf die Reihenfolge an“ werden als richtig gewertet.

Angesprochene Kompetenz: H4-I2-K1

H4: Die Aufgabe verlangt eine mathematische Begründung für einen vorgegebenen (richtigen) Umformungsschritt.

I2: Es handelt sich um das Umformen von Termen.

K1: Das Benennen einer Umformungs- bzw. Rechenregel für Terme ist Abrufen von elementarem Wissen.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H4: Argumentieren, Begründen
K2: Herstellen von Verbindungen

Wandertag

Die Klasse will am Wandertag mit dem Bus zu einem Schloss fahren. Sandra und Lukas haben bei zwei Reisebüros nachgefragt und folgende Auskünfte erhalten:

Tarif 180/2: Für den Bus wird eine Tagesgebühr von € 180,- verlangt; zusätzlich kostet jeder gefahrene Kilometer noch € 2,-.

Tarif 120/3: Für den Bus wird eine Tagesgebühr von € 120,- verlangt; zusätzlich kostet jeder gefahrene Kilometer noch € 3,-.

Sandra hat auch schon ausgerechnet, dass beide Tarife gleich teuer wären, wenn man genau 60 Kilometer fährt.

Aufgabe: Bei welchen Fahrtstrecken ist welcher Tarif günstiger? Warum ist dies so?

Lösung:

Richtige Lösung:

sinngemäß: Bei Fahrten unter 60 km ist der Tarif „120/3“ günstiger, weil bei kürzeren Fahrten das hohe Kilometergeld nicht so viel ausmacht, aber der niedrige Tagestarif stärker ins Gewicht fällt.
Bei Fahrten über 60 km ist der Tarif „180/2“ günstiger, weil bei längeren Fahrten der Tagestarif nicht so viel ausmacht, aber das niedrige Kilometergeld stärker ins Gewicht fällt.

Hinweise zur Lösung:

Die Argumentationen können auch direkter die lineare Funktion als Modell ansprechen wie beispielsweise:

Die beiden Tarife können durch lineare Funktionen beschrieben werden. Bei Fahrten über 60 km ist der Tarif „180/2“ günstiger, weil diese Funktion mit der kleineren Steigung (k = 2) weniger rasch wächst, also ab dem Schnittpunkt kleinere Funktionswerte liefert als jene mit der größeren Steigung (k = 3).

oder: Die beiden Tarife können durch lineare Funktionen beschrieben werden. Bei Fahrten über 60 km ist der Tarif „180/2“ günstiger, weil ab dem Schnittpunkt die Gerade mit der kleineren Steigung (k = 2) flacher liegt und damit unter der steileren (k = 3) verläuft.

Die Argumentationen können auch grafisch erfolgen.

Formulierungen werden als richtig gewertet, wenn
1. die Entscheidung richtig getroffen wurde und
2. eine mathematisch richtige Begründung angeführt ist.

Angesprochene Kompetenz: H4-I2-K2

H4: Die Aufgabe verlangt eine mathematische Begründung für die getroffene Entscheidung.

I2: Den mathematischen Sachverhalt bilden zwei lineare Funktionen.

K2: Zunächst ist es erforderlich zu erkennen, dass es sich um zwei lineare Tarife mit unterschiedlichem k und d handelt, diese genau einen Schnittpunkt haben und somit ein Tarif für $x < 60$ günstiger ist, der andere für $x > 60$. Zur Feststellung bzw. Begründung, welcher Tarif in welchem Fall günstiger ist, können grafische Vorstellungen (oder Grafiken selbst), die Unterschiedlichkeit der beiden Parameter k bzw. d oder auch entsprechende Berechnungen genutzt werden. Jedenfalls müssen bei der Bearbeitung dieser Aufgabe mehrere Aspekte miteinander verbunden werden.

I2: Variable, funktionale Abhängigkeiten
H4: Argumentieren, Begründen
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Eintrittspreise

Die Eintrittspreise in einen Zoo betrugen heuer für Kinder k Euro, für Erwachsene e Euro. Während der Saison zählte man a Kinder und b Erwachsene als Besucher.
Die Gesamteinnahmen G der Saison konnten also nach der folgenden Formel berechnet werden: $G = a \cdot k + b \cdot e$

Für die Gestaltung der Preise im nächsten Jahr werden folgende Vorschläge gemacht:

Hr. Auer: Wir belassen die Eintrittspreise für Kinder gleich und heben die Eintrittspreise für Erwachsene um einen Euro. Wenn wir dann gleich viele Besucher wie heuer haben, sind die Gesamteinnahmen um b Euro höher, weil

$G_{neu} = a \cdot k + b \cdot (e + 1) = a \cdot k + b \cdot e + b \cdot 1 = G + b$

Hr. Carl: Wir senken die Eintrittspreise für Kinder um einen Euro und heben jene für Erwachsene um zwei Euro. Wenn wir dann gleich viele Besucher wie heuer haben, sind die Gesamteinnahmen um $a + 2 \cdot e$ Euro höher, weil

$G_{neu} = a \cdot (k - 1) + (b + 2) \cdot e = a \cdot k + a + b \cdot e + 2 \cdot e = a \cdot k + b \cdot e + a + 2 \cdot e = G + a + 2 \cdot e$

Fr. Damm: Wir halbieren die Eintrittspreise für Kinder und lassen jene für Erwachsene gleich. Wenn dann doppelt so viele Kinder und doppelt so viele erwachsene Besucher kommen, sind die Gesamteinnahmen um $b \cdot e$ Euro höher, weil

$G_{neu} = a \cdot 2 \cdot k/2 + b \cdot 2 \cdot e = a \cdot k + b \cdot e + b \cdot e = G + b \cdot e$

Aufgabe: Wer argumentiert richtig, wer falsch?

Lösung: Kreuze entsprechend an:

Es argumentiert	**richtig**	**falsch**
Hr. Auer		
Hr. Carl		
Fr. Damm		

Richtige Lösung:

Hr. Auer und Fr. Damm argumentieren richtig, Hr. Carl argumentiert falsch.

Angesprochene Kompetenz: H4-I2-K3

H4: Kernstück der Formulierungen sind dargelegte mathematische Begründungen.

I2: Die mathematischen Begründungen beinhalten Termumformungen und Vergleiche von Termen über Substitutionen.

K3: Die Aufgabe verlangt, jeweils die Richtigkeit der gesamten Argumentationskette zu kontrollieren.

Geometrische Figuren und Körper

Bildungstheoretische Orientierung

Lebensvorbereitung

Zur Lebensvorbereitung im Bereich der elementaren Geometrie gehört Wissen über geometrische Grundbegriffe (wie Punkt, Strecke, Gerade, Ebene, Parallele, Normale, Winkel, Symmetrie und Ähnlichkeit) sowie Wissen über einfache geometrische Figuren (insbesondere allgemeine und besondere Vierecke, allgemeine und besondere Dreiecke, Kreis und Kreisteile) und Körper (Würfel, Quader, Prisma, Pyramide, Zylinder, Kegel, Kugel).

Solche geometrischen Grundbegriffe sind Teil unserer Alltagssprache: Wir sprechen von einer „quaderförmigen Schachtel“, einem „quadratischen Tisch“ oder einem „rechteckigen Bildschirm“. Geometrisches Grundwissen ist jedoch nicht nur Voraussetzung für eine verständige Kommunikation in vielen Alltagssituationen, wir müssen – etwa beim Einrichten einer neuen Wohnung – Pläne lesen, Maßstabangaben interpretieren und eigene Entwürfe entsprechend darstellen können. Dabei ist oft auch räumliches Vorstellungsvermögen wichtig. Darüber hinaus sind einfache Vermessungen, das Berechnen und Abschätzen von Flächen- und Rauminhalten und gegebenenfalls auch das Überprüfen von rechten Winkeln in vielen lebensweltlichen Situationen von Bedeutung.

Anschlussfähigkeit

In weiterführenden (schulischen) Ausbildungen ist oftmals Wissen über elementare geometrische Zusammenhänge, über einfache geometrische Figuren und Körper sowie deren wichtigste Eigenschaften erforderlich.

In der Vektorrechnung wie auch in der Analytischen Geometrie sind der Umgang mit dem Koordinatensystem sowie die Kenntnis einfacher Konstruktionen unumgänglich. Geometrische Objekte, insbesondere geometrische Figuren und Körper werden im Koordinatensystem positioniert und zugleich „algebraisiert“.

In der Trigonometrie geht es vor allem um Beziehungen im Dreieck. Spezielle Dreiecke wie rechtwinklige, gleichseitige, gleichschenklige müssen erkannt bzw. deren spezielle Eigenschaften gewusst werden.

Geometrische Grundvorstellungen werden gelegentlich auch in der Differentialrechnung (z. B. Tangentenproblem, Extremwertaufgaben) benötigt. Dabei müssen vor allem grundlegende Eigenschaften von geometrischen Figuren und Körpern bekannt sein sowie Ähnlichkeit und der Satz von Pythagoras verständig angewandt werden.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H1: Darstellen, Modellbilden
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

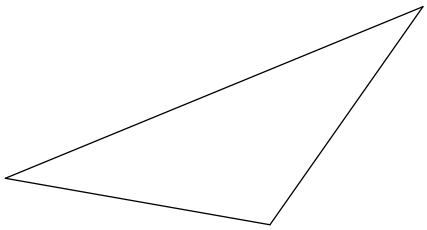
Dreieck

Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten und einem Winkel, der größer ist als 90°, heißt gleichschenklig-stumpfwinkliges Dreieck.

Aufgabe: Zeichne ein gleichschenklig-stumpfwinkliges Dreieck!

Lösung:

Richtige Lösung:



Hinweise zur Lösung:

Das angegebene Dreieck ist nur ein Vertreter dieser Klasse von Dreiecken. Länge der Seiten und Größe der Winkel sind beliebig, so lange die beiden vorgegebenen Eigenschaften erfüllt sind.

Angesprochene Kompetenz: H1-I3-K1

H1: Die Aufgabe verlangt die Übertragung eines verbal gegebenen mathematischen Sachverhalts (Beschreibung einer geometrischen Figur mit bestimmten Eigenschaften) in eine mathematische (grafische/geometrische) Darstellungsform.

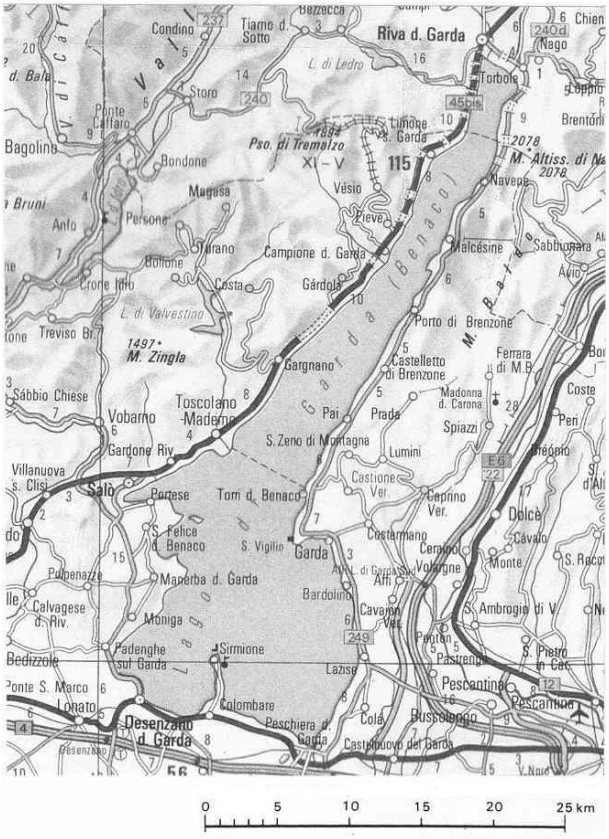
I3: Bei der darzustellenden Figur handelt es sich um ein Dreieck.

K1: Die Aufgabe erfordert die direkte Realisierung von zwei vorgegebenen elementaren Eigenschaften von Dreiecken in einem selbst gewählten Beispiel.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H1: Darstellen, Modellbilden
K2: Herstellen von Verbindungen

Gardasee

Im Ausschnitt einer Karte ist der Gardasee (Italien) zu erkennen:



Aufgabe: Schätze mit Hilfe des Maßstabes den Flächeninhalt des Gardasees! (*Hinweis:* Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir dies bei deiner Schätzung hilft.)

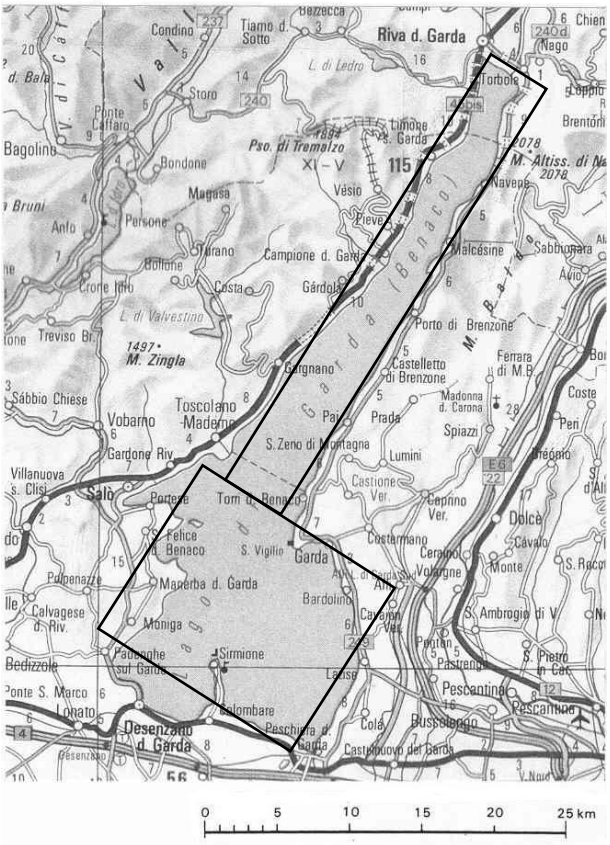
Lösung: Der Flächeninhalt des Gardasees beträgt ca. ……. km^2.

Richtige Lösung:

Der Flächeninhalt des Gardasees beträgt ca. 370 km^2.

Hinweise zur Lösung:

Der Flächeninhalt lässt sich durch Zerlegung der geometrischen Figur „Gardasee“ in einfache geometrische Figuren ermitteln, wie z. B. zwei Rechtecke:



Abweichungen der Schätzung vom ± 50 km^2 werden toleriert.

Angesprochene Kompetenz: H1-I3-K2

H1: Die Aufgabe erfordert die Auswahl von geeigneten mathematischen Modellen (geometrischen Figuren) sowie geeigneter Mittel (Maßstab) zur Abschätzung des Flächeninhalts.

I3: Es geht um den Einsatz geometrischer Figuren zur Abschätzung eines Flächeninhaltes.

K2: Zur Lösung der Aufgabe müssen mehrere verschiedene mathematische Tätigkeiten miteinander verbunden werden: Zunächst muss ein bestimmter Lösungsweg festgelegt werden, der vor allem in der Auswahl geeigneter einfacher geometrischer Figuren zur Schätzung des Flächeninhalts besteht. Die Maßstabsangaben müssen dann entsprechend zur Längenbestimmung von Bestimmungsstücken angewandt, gegebenenfalls Teilflächen und schließlich eine Gesamtfläche ermittelt werden.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H1: Darstellen, Modellbilden
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Schrägriss und Grundriss

Schrägriss und Grundriss bieten unterschiedliche Vor- und Nachteile.

Aufgabe: Kreuze an, ob die angegebene Aussage zutrifft oder nicht!

Lösung:

		trifft zu	**trifft nicht zu**
A	Im Grundriss kann man die Höhe eines Körpers erkennen.		
B	Im Schrägriss erscheinen rechte Winkel immer als rechte Winkel.		
C	Aus dem Grundriss kann man mittels Maßstab wahre Längen errechnen.		
D	Im Schrägriss erscheinen alle gleich langen Seiten gleich lang.		

Richtige Lösung:

Aussage C trifft zu, die Aussagen A, B und D sind unzutreffend.

Angesprochene Kompetenz: H1-I3-K3

H1: Die Aufgabe erfordert die (gedankliche) Auseinandersetzung mit Eigenschaften von zwei mathematischen Darstellungen von Körpern (Grundriss und Schrägriss).

I3: Schrägriss und Grundriss sind gängige Darstellungen der Geometrie.

K3: Die Aufgabe erfordert Nachdenken über grundlegende, aus der Angabe nicht unmittelbar erkennbare Eigenschaften der beiden Darstellungsformen.

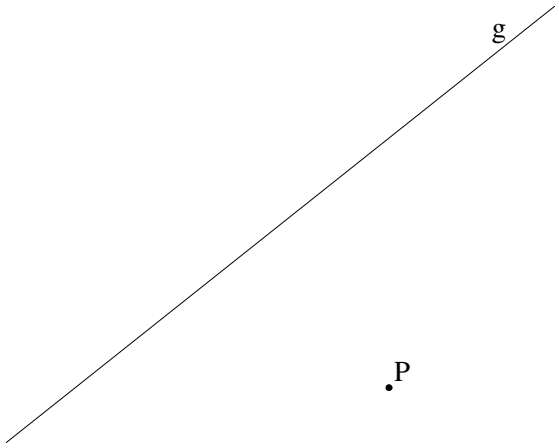
I3: Geometrische Figuren und Körper
H2: Rechnen, Operieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und Fertigkeiten

Gerade

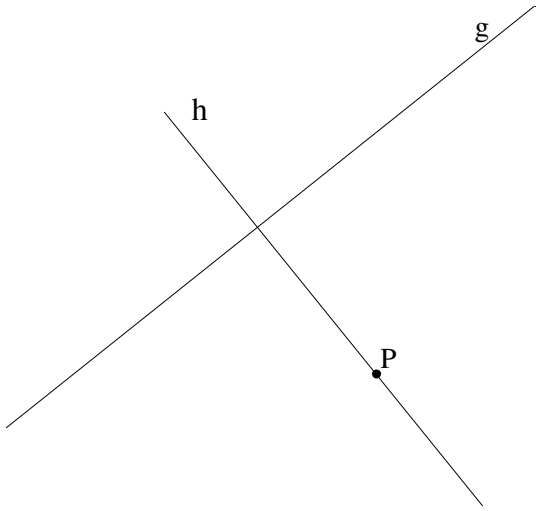
Gegeben ist eine Gerade g und ein Punkt P.

Aufgabe: Konstruiere eine Gerade h, die normal zur Geraden g durch den Punkt P verläuft.

Lösung:



Richtige Lösung:



Angesprochene Kompetenz: H2-I3-K1

H2: Die Aufgabe erfordert das Konstruieren einer Normalen durch einen gegebenen Punkt. Geometrisches Konstruieren ist eine operative Tätigkeit.

I3: Punkt, Gerade und Normale sind Grundbegriffe der Geometrie.

K1: Die Konstruktion ist elementar, sie erfordert lediglich die direkte Anwendung eines grundlegenden Verfahrens.

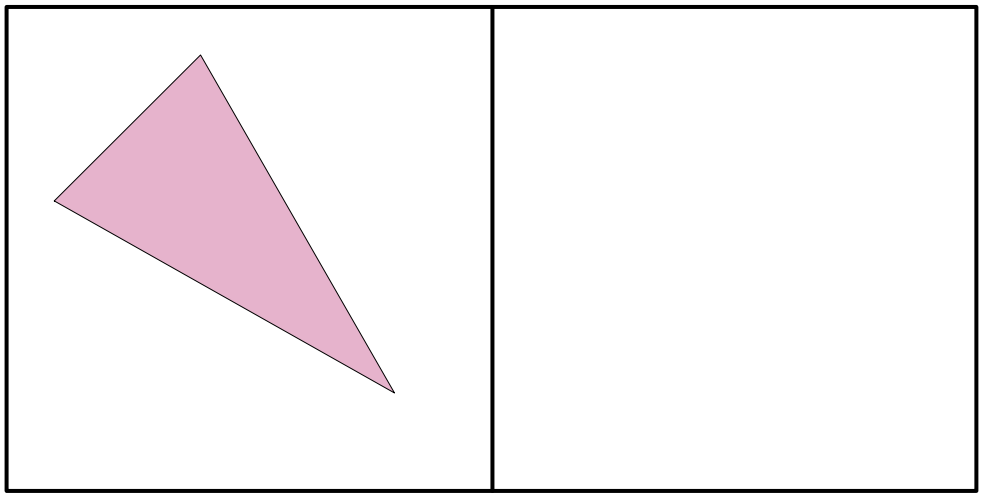
I3: Geometrische Figuren und Körper
H2: Rechnen, Operieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Wasserfarbendruck

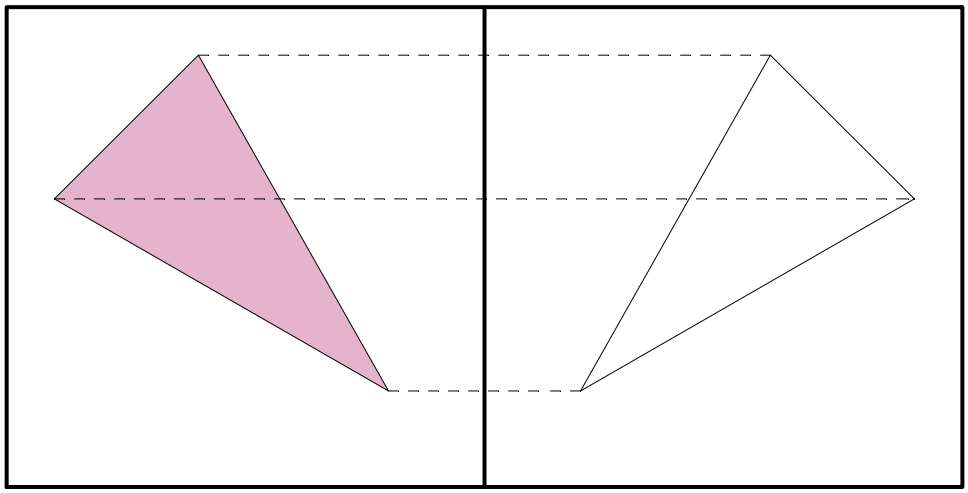
Anna hat vor sich auf dem Schreibtisch ein aufgeschlagenes Heft liegen. Auf die linke Seite des Heftes malt sie mit Wasserfarben ein Dreieck (siehe Abbildung). Noch vor dem Eintrocknen der Farben schließt sie das Heft und öffnet es gleich darauf wieder. Auf der rechten Heftseite ist nun der Abdruck des Dreiecks erkennbar.

Aufgabe: Konstruiere das Dreieck auf der rechten Heftseite!

Lösung:



Richtige Lösung:



Angesprochene Kompetenz: H2-I3-K2

H2: Die Aufgabe verlangt (vor allem) die Durchführung einer geometrischen Konstruktion, nämlich das Spiegeln eines Dreiecks an einer Geraden.

I3: Die Achsenspiegelung ist ein grundlegendes Verfahren der Geometrie zur Erzeugung symmetrischer Figuren.

K2: Zunächst muss die im Kontext beschriebene Abbildung des Dreiecks geometrisch als Spiegelung interpretiert werden. Dann muss diese Spiegelung als geometrische Konstruktion durchgeführt werden. Somit ist also eine Verbindung mehrerer mathematischer Tätigkeiten gefordert, wobei die Durchführung der Spiegelung im Vordergrund steht.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H2: Rechnen, Operieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Raute

Stell dir vor du hättest soeben eine Raute (einen Rhombus) konstruiert, wobei die Seitenlänge 5 cm misst und ein Winkel 40° beträgt.

Aufgabe: Beschreibe, wie du bei der Konstruktion vorgegangen bist!

***Lösung*:**

Richtige Lösung:

Eine mögliche Beschreibung des Lösungsweges könnte sinngemäß lauten:

1) Ich zeichne die Seite *a* mit der Länge 5 cm, mit den Eckpunkten A und B.
2) Ich zeichne in A den Winkel $\alpha = 40°$.
3) Ich erhalte den Eckpunkt D durch Abschlagen der Strecke von 5 cm von A aus (auf dem zuletzt gezeichneten Schenkel von α).
4) Ich erhalte C, wenn ich von B und von D aus jeweils 5 cm mit dem Zirkel abschlage.

Hinweise zur Lösung:

Eine andere mögliche Vorgehensweise bzw. Beschreibung wäre:

1) Ich zeichne den Winkel $\alpha = 40°$ mit dem Scheitel A.
2) Ich schlage auf beiden Schenkeln von A aus 5 cm ab und erhalte in den Schnittpunkten von Kreisbogen und Schenkel die Eckpunkte B und D.
3) Ich zeichne eine Parallele zu AB durch den Eckpunkt D und eine Parallele zu AD durch den Eckpunkt B. Der Schnittpunkt der beiden Geraden ist der Eckpunkt C.

Die Dokumentation des Konstruktionsweges kann von den hier angegebenen abweichen, sie sollte jedoch gut verständlich, genau und vollständig sein und sich einer mathematisch korrekten Ausdrucksweise bedienen.

Angesprochene Kompetenz: H2-I3-K3

H2: Die Aufgabe erfordert die gedankliche Planung einer geometrischen Konstruktion.

I3: Es geht um die Konstruktion einer geometrischen Figur (Raute).

K3: Die Aufgabe erfordert Nachdenken über eine mathematische Vorgehensweise (Planung und Durchführung der Konstruktion einer geometrischen Figur) und deren angemessene Dokumentation.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H3: Interpretieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Regentonne

Eine zylinderförmige Regentonne ist 82 cm hoch und hat einen Durchmesser von 82 cm. Sie ist zur Hälfte mit Regenwasser gefüllt.

Aufgabe: Was wird durch die Rechnung $(\frac{82}{2})^2 \cdot \pi$ ermittelt?

(Kreuze entsprechend an!)

Lösung:

- ☐ Das Volumen der Regentonne
- ☐ Die Oberfläche der Regentonne
- ☐ Das Volumen des Regenwassers
- ☐ Die Mantelfläche der Regentonne
- ☐ Die Grundfläche der Regentonne
- ☐ Der Umfang der Grundfläche der Regentonne

Richtige Lösung:

Durch die Rechnung $(\frac{82}{2})^2 \cdot \pi$ wird die Grundfläche der Regentonne ermittelt.

Hinweis zur Lösung:

Mathematisch korrekt müsste es „… der Inhalt der Grundfläche der Regentonne … “ heißen (ebenso „… Inhalt der Oberfläche/Mantelfläche …“). Eine so exakte Sprechweise ist jedoch in (Schulbüchern) der Sekundarstufe I kaum üblich.

Angesprochene Kompetenz: H3-I3-K1

H3: Die Aufgabe erfordert das Deuten eines mathematischen Sachverhalts (Berechnung einer geometrischen Größe) im vorgegebenen Kontext.

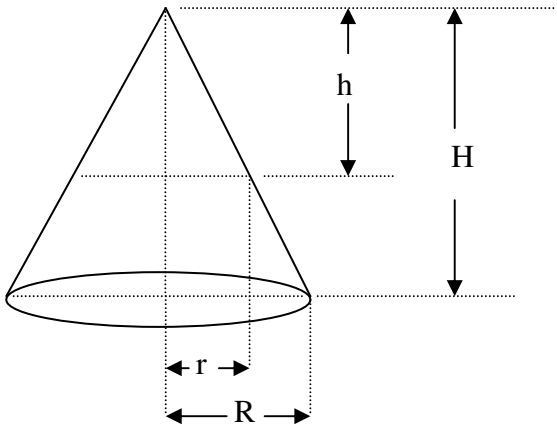
I3: Bei der zu deutenden Größe handelt es sich um den Inhalt der Grundfläche (oder Deckfläche) eines Zylinders.

K1: Die Aufgabe erfordert die direkte Anwendung von elementarem geometrischem Grundwissen (Flächeninhaltsberechnung eines Kreises bzw. Grundfläche eines Zylinders).

I3: Geometrische Figuren und Körper
H3: Interpretieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Kegel

Die angegebene Figur zeigt einen Kegel.



Aufgabe: Was wird durch $\frac{\pi}{3} \cdot (R^2 \cdot H - r^2 \cdot h)$ berechnet?

Lösung: Berechnet wird ……..

Richtige Lösung:

Berechnet wird das Volumen des Kegelstumpfes (mit der Höhe H-h).

Hinweise zur Lösung:

Richtig sind auch Lösungen,

- die den Begriff „Kegelstumpf“ nicht verwenden, sondern den Körper verbal beschreiben (z. B.: Es wird das Volumen des Kegels mit abgeschnittener Spitze berechnet. Der Körper hat die Höhe H - h.)
  oder
- die in der gegebenen Skizze den entsprechenden Teil des Kegels markieren.

Angesprochene Kompetenz: H3-I3-K2

H3: Die Lösung der Aufgabe erfordert, in einer symbolischen Darstellung Zusammenhänge zu erkennen und diese im gegebenen Kontext zu deuten.

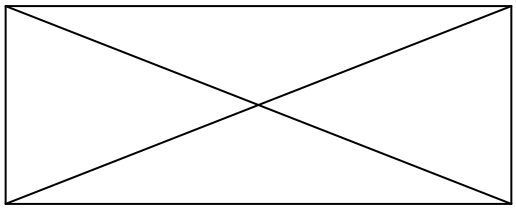
I3: Kegel und Kegelvolumen sind geometrische Begriffe.

K2: Neben Kenntnissen über die Berechnung des Volumens eines Kegels ist eine zweckmäßige (gedankliche) Umformung der angegebenen Formel erforderlich und es muss gewusst werden, wie diese Formel im gegebenen geometrischen Kontext gedeutet werden kann.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H3: Interpretieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Pyramide

Anna, Bernd, Christine und David betrachten das Faltmodell einer Pyramide von oben (siehe Abbildung). Alle vier wollen von diesem Blickwinkel aus die Form der Pyramide erläutern.



Aufgabe: Welche Aussagen über diese Pyramide treffen zu, welche nicht? Kreuze an!

Lösung:

		trifft zu	**trifft nicht zu**
Anna	Die Grundkanten der Pyramide sind alle gleich lang.		
Bernd	Die vier Seitenflächen der Pyramide bestehen aus jeweils zwei deckungsgleichen gleichschenkligen Dreiecken.		
Christine	Die Seitenkanten der Pyramide sind alle gleich lang.		
David	Die Pyramide besitzt eine rechteckige Grundfläche.		

Richtige Lösung:

Die Aussage von Anna ist falsch, alle anderen Aussagen sind korrekt.

Angesprochene Kompetenz: H3-I3-K3

H3: Die Aufgabe erfordert aus einer geometrischen Darstellung Zusammenhänge zu erkennen und in einem geometrischen Kontext zu deuten.

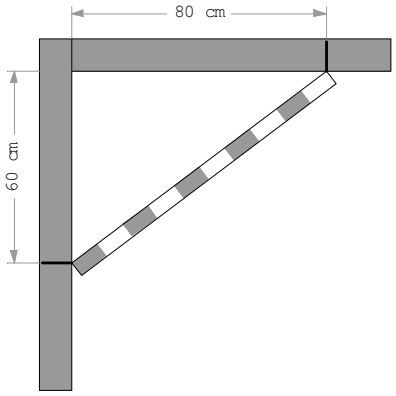
I3: Es geht um eine geometrische Darstellung einer Pyramide.

K3: Die Aufgabe erfordert das Nachdenken über vorgegebene Interpretationen einer Darstellung eines geometrischen Körpers sowie deren Bewertung.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H4: Argumentieren, Begründen
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Rechter Winkel

Ein Tischler überprüft, ob zwei zusammengefügte Holzbalken tatsächlich einen rechten Winkel bilden. Er bringt dazu an beiden Balken jeweils eine Markierung an, die erste 60 cm und die zweite 80 cm von der Innenkante des jeweils anderen Balkens entfernt (siehe Grafik!). Dann misst er den Abstand zwischen den beiden Markierungen.



Aufgabe: Gib eine mathematische Begründung dieses Messverfahrens für rechte Winkel an!

Lösung:

Richtige Lösung:

Falls ein rechter Winkel vorliegt, muss der Satz von Pythagoras gelten, also $80^2 + 60^2 = c^2$.
Im vorliegenden Beispiel ist $80^2 + 60^2 = 10000 = 100^2$.
Somit bilden die beiden Holzbalken einen rechten Winkel, falls der Abstand zwischen den beiden Markierungen 100 cm beträgt. Beträgt der Abstand nicht 100 cm, so bilden sie keinen rechten Winkel.

Angesprochene Kompetenz: H4-I3-K1

H4: Die Aufgabe verlangt die Angabe eines mathematischen Arguments, das für die Verwendung einer bestimmten Methode zur Überprüfung eines rechten Winkels in einem außermathematischen Zusammenhang spricht.

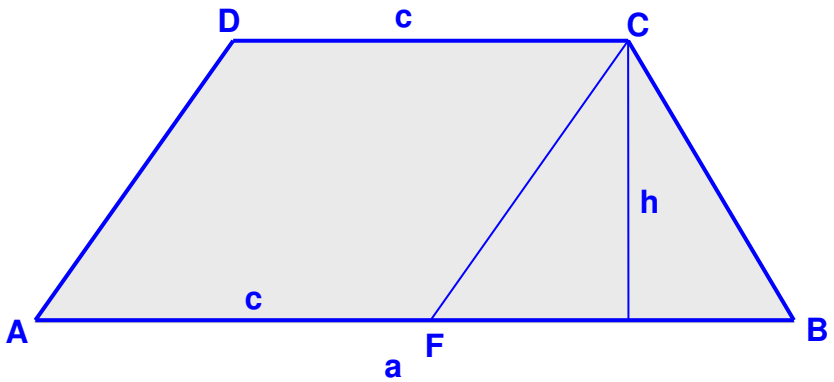
I3: Die Aufgabe erfordert Wissen über rechtwinklige Dreiecke und über den Satz von Pythagoras.

K1: Die Argumentation besteht aus der direkten Anwendung des Satzes von Pythagoras.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H4: Argumentieren, Begründen
K2: Herstellen von Verbindungen

Flächeninhalt

Claudia findet in einem Schulbuch folgende Grafik eines Trapezes ABCD:



Darunter wird eine Formel für den Flächeninhalt des Trapezes angegeben:

$$A = c \cdot h + \frac{(a-c) \cdot h}{2}$$

Aufgabe: Erkläre die angegebene Flächeninhaltsformel!

***Lösung*:**

Richtige Lösung:

Das Trapez wird in ein Parallelogramm und ein Dreieck zerlegt. Die Höhen beider Teilfiguren sind gleich, die Seitenlänge des Parallelogramms ist c, jene des Dreiecks ist (a - c).
Die Flächeninhalte von Parallelogramm ($c \cdot h$) und Dreieck ($(a - c) \cdot h/2$) werden addiert.

Angesprochene Kompetenz: H4-I3-K2

H4: Die Aufgabe verlangt die mathematische Begründung (Argumentationskette) einer Formel.

I3: Es geht in dieser Aufgabe um Flächenformeln elementarer geometrischer Figuren (Parallelogramm, Dreieck, Trapez).

K2: Die Aufgabe erfordert zunächst das Erkennen von Beziehungen in einer grafischen (geometrischen) Darstellung. Diese müssen in geeigneter Weise mit einer symbolischen Darstellung in Zusammenhang gebracht werden.

I3: Geometrische Figuren und Körper
H4: Argumentieren, Begründen
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Verwandte Vierecke

Nina sagt: „Ein gleichschenkliges Trapez, ein Rechteck und ein Quadrat sind verwandte Vierecke, denn sie haben einige gemeinsame Eigenschaften."
Max glaubt Nina nicht und fordert sie auf, solche gemeinsamen Eigenschaften zu nennen.

***Aufgabe*:** Welche der folgenden Aussagen Ninas sind korrekt, welche nicht?

Lösung:

		korrekt	**nicht korrekt**
A	Alle drei Vierecke haben mindestens zwei parallele Seiten.		
B	Bei allen drei Vierecken sind die beiden Diagonalen gleich lang.		
C	Bei allen drei Vierecken stehen die beiden Diagonalen im rechten Winkel zueinander.		
D	Alle drei Vierecke haben mindestens zwei gleich lange Seiten.		

Richtige Lösung:

Die Argumente A, B und D sind korrekt, C ist nicht korrekt.

Angesprochene Kompetenz: H4-I3-K3

H4: In dieser Aufgabe geht es um mathematische (geometrische) Eigenschaften/ Beziehungen, die als Argumente für eine Aussage angeführt werden.

I3: Die vorgegebenen Aussagen beziehen sich auf Eigenschaften geometrischer Figuren (gleichschenkliges Trapez, Rechteck und Quadrat).

K3: Die Aufgabe verlangt Nachdenken über vorgegebene Aussagen und eine Bewertung hinsichtlich ihrer Gültigkeit.

Statistische Darstellungen und Kenngrößen

Bildungstheoretische Orientierung

Lebensvorbereitung

Es wird hier vor allem auf eine „passive“ mathematical literacy ankommen: Tabellarische oder grafische Darstellungen statistischer Daten muss man oft auch in Alltagssituationen sicher und verständig „lesen“ können, arithmetisches Mittel und Median sind häufig verwendete Modelle für „Durchschnitt“, die man kennen und im jeweiligen Kontext verständig interpretieren muss. Wichtig ist dabei auch ein grundlegendes Wissen um und eine Sensibilität für typische (vor allem grafische) Manipulationen.

„Aktive“ Handlungen wie Darstellen, Modellbilden oder Operieren werden sich in alltäglichen Lebenssituationen auf eher einfache Situationen beschränken (oder technologieunterstützt durchzuführen sein); Argumentieren, Begründen wird sich auf grundlegende (definitorische) Eigenschaften statistischer Konzepte stützen.

Gelegentlich wird es auch in Alltagssituationen notwendig sein, die relative Häufigkeit als Interpretation/Modell für die Wahrscheinlichkeit zu kennen und anwenden zu können.

Anschlussfähigkeit

Im Hinblick auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind vor allem das Konzept des Zentralmaßes (vor allem arithmetisches Mittel) und die Idee der Streuung (allgemein, allenfalls Spannweite und Interquartilabstand; die empirische Standardabweichung wird im Lehrplan der Sekundarstufe I nicht genannt) als zentrale Eigenschaften/Parameter von Verteilungen von Bedeutung.

Als grafische Darstellung von (diskreten Häufigkeits-)Verteilungen steht das Stabdiagramm im Vordergrund (das Histogramm wird im Lehrplan der Sekundarstufe I nicht genannt). Die Darstellung von Verteilungen in Stabdiagrammen (Wechseln zwischen Darstellungsformen), die Interpretation von Stabdiagrammen und Reflexionen anhand von Stabdiagrammen sind im Hinblick auf die Anschlussfähigkeit bedeutsam.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H1: Darstellen, Modellbilden
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

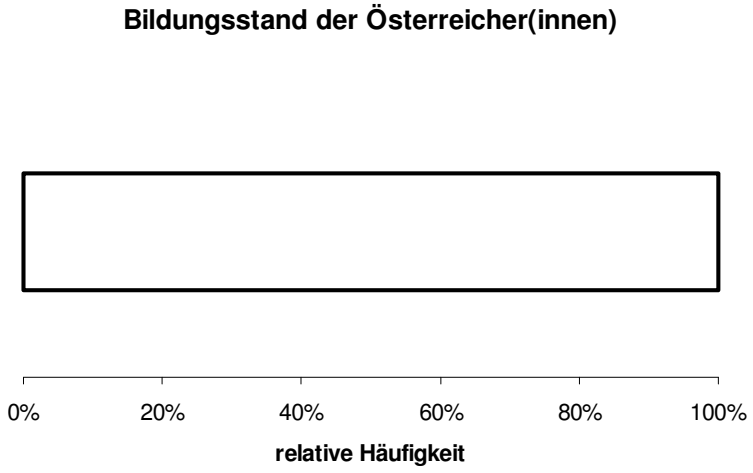
Bildungsstand der Österreicher(innen) im Jahre 2002

Die folgende Tabelle zeigt die Verteilung der österreichischen Wohnbevölkerung (15 Jahre und älter) hinsichtlich der höchsten abgeschlossenen Ausbildung („Bildungsstand“):

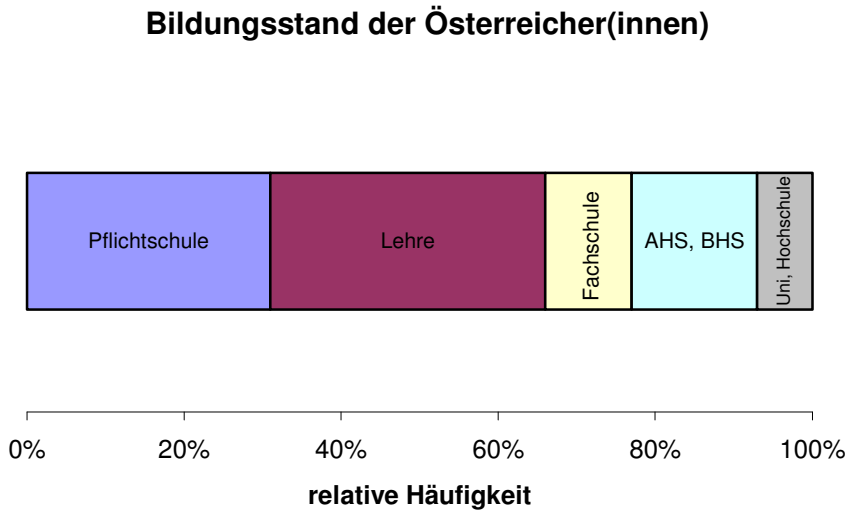
Bildungsstand	**relative Häufigkeit** (in %)
Pflichtschule	31
Lehre	35
Fachschule	11
AHS, BHS	16
Universität, Hochschule	7
insgesamt	**100**

Aufgabe: Stelle diese Verteilung in einem Streifendiagramm dar!

Lösung:



Richtige Lösung:



Hinweise zur Lösung:

Die Reihenfolge der Anordnung ist beliebig.
Zeichenungenauigkeiten (von ± 2 mm) sollten toleriert werden.

Angesprochene Kompetenz: H1-I4-K1

H1: Die Aufgabe verlangt die Übertragung eines tabellarisch gegebenen Sachverhalts (Verteilung der österreichischen Wohnbevölkerung hinsichtlich höchster abgeschlossener Ausbildung) in eine andere (grafische) Darstellungsform.

I4: Bei der verlangten Darstellungsform (Streifendiagramm) handelt es sich um eine für die Statistik typische grafische Darstellung.

K1: Die Aufgabe erfordert lediglich die unmittelbare Übertragung der tabellarisch gegebenen Daten in die verlangte grafische Darstellung. (Die – hier nicht sonderlich effiziente – Verwendung eines PCs würde zusätzliche Tätigkeiten am PC erfordern.)

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H1: Darstellen, Modellbilden
K2: Herstellen von Verbindungen

Nächtigungen in Österreichs Fremdenverkehrsbetrieben im Winter 2004/05

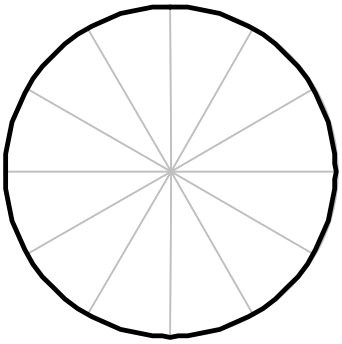
Die folgende Tabelle zeigt die Anzahl der Nächtigungen in Österreichs Fremdenverkehrsbetrieben im Winter 2004/05:

Gäste aus	**Übernachtungen** (in 1000)
Österreich	3870
Deutschland	5233
Niederlande	844
anderen Ländern	3502

Aufgabe: Stelle die Verteilung der Wintergäste in einem Kreisdiagramm dar!

Lösung:

Nächtigungen in Österreich im Winter 2004/05



Richtige Lösung:

Hinweise zur Lösung:

Die Reihenfolge der Anordnung ist beliebig.
Geringfügige Zeichenungenauigkeiten sollten toleriert werden.

Angesprochene Kompetenz: H1-I4-K2

H1: Die Aufgabe verlangt die Übertragung eines tabellarisch gegebenen Sachverhalts (Nächtigungszahlen) in eine andere (grafische) Darstellungsform.

I4: Bei der verlangten Darstellungsform (Kreisdiagramm) handelt es sich um eine für die Statistik typische grafische Darstellung.

K2: Die Aufgabe ist an sich elementar, da aber die absoluten und nicht die relativen Häufigkeiten gegeben sind, erfordert die Lösung auch die Vernetzung mit operativen Tätigkeiten (Summe bilden, Prozentwerte berechnen).
(Wenn die Aufgabe mit PC gelöst wird, dann entfallen zwar diese operativen Tätigkeiten, es kommen dafür aber entsprechende Tätigkeiten am PC hinzu.)

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H1: Darstellen, Modellbilden
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Koalitionen

Parlamentsparteien gehen oft so genannte Koalitionen (= Bündnisse) mit anderen Parlamentsparteien ein, um gemeinsam über eine Mandatsmehrheit („Stimmenmehrheit“) im Parlament zu verfügen.
Eine solche Mehrheit ermöglicht es dann zum Beispiel, Gesetze (auch gegen den Willen der übrigen Parteien) zu beschließen.

Aufgabe: Du möchtest anhand einer grafischen Darstellung der Mandatsverteilung eines Parlaments überlegen, welche Koalitionen eine Mandatsmehrheit haben würden.
Warum erscheint für diesen Zweck ein Kreisdiagramm geeigneter als ein Stabdiagramm?

Lösung:

Richtige Lösung:

Weil man anhand eines Kreisdiagramms (zumindest bei geeigneter Anordnung) unmittelbar erkennen kann, welche Partei(en) einen Mandatsanteil von mehr als 50% hat (haben); anhand eines Stabdiagramms ist der Anteil an der Gesamtheit in der Regel nicht unmittelbar erkennbar.

Hinweise zur Lösung:

Eine als richtig zu wertende Antwort wird in irgendeiner Weise damit argumentieren, dass man am Stabdiagramm in der Regel nicht erkennen kann, welchen Anteil an der Gesamtheit ein Stab hat (oder mehrere Stäbe zusammen haben). Am Kreisdiagramm hingegen sind Anteile bei geeigneter Anordnung unmittelbar ablesbar.

Angesprochene Kompetenz: H1-I4-K3

H1: Bei dieser Aufgabe geht es um (Stärken und Schwächen von) zwei Darstellungsformen.

I4: Bei den Darstellungsformen handelt es sich um zwei typische Darstellungen der Statistik, nämlich das Kreis- und das Stabdiagramm.

K3: Die Aufgabe verlangt allerdings nicht, solche Darstellungen zu erstellen, sondern sie verlangt vor allem Reflexion(swissen) hinsichtlich eines für die Aufgabenstellung relevanten Vorteils des Kreisdiagramms gegenüber dem Stabdiagramm.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H2: Rechnen, Operieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Durchschnittliche Körpergröße

Für sieben Spieler einer Basketballmannschaft wurden folgende Körpergrößen (in cm) gemessen:

192 195 188 198 202 198 193

Aufgabe: Ermittle den Median der angegebenen Körpergrößen!

Lösung: Der Median beträgt …….. cm.

Richtige Lösung:

Der Median beträgt 195 cm.

Angesprochene Kompetenz: H2-I4-K1

H2: Die Aufgabe verlangt die operative Ermittlung einer Maßzahl.

I4: Bei der verlangten Maßzahl (Median) handelt es sich um ein statistisches Zentralmaß.

K1: Die Aufgabe erfordert die unmittelbare Anwendung elementarer Grundkenntnisse zur Ermittlung des Medians (Daten ordnen, den in der Mitte stehenden Wert ablesen).

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H2: Rechnen, Operieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Durchschnittliches Monatsgehalt

Das durchschnittliche Monatsgehalt (arithmetisches Mittel) aller Mitarbeiter(innen) eines Betriebes beträgt € 2.150,-.
In dem Betrieb sind 21 Männer und 7 Frauen beschäftigt, das durchschnittliche Monatsgehalt (arithmetisches Mittel) der Frauen beträgt € 1.850,-.

Aufgabe: Ermittle das durchschnittliche Monatsgehalt (arithmetisches Mittel) der in diesem Betrieb tätigen Männer!

Lösung: Das durchschnittliche Monatsgehalt der Männer beträgt € ……

Richtige Lösung:

Das durchschnittliche Monatsgehalt der Männer beträgt € 2.250,-

Hinweise zur Lösung:

Es sind verschiedene gleichwertige Lösungswege möglich, z. B.:

a) Gehälter insgesamt: $2150 \cdot 28 = 60200$
Gehälter der Frauen insgesamt: $1850 \cdot 7 = 12950$
Daher Gehälter der Männer insgesamt: $60200 - 12950 = 47250$
Durchschnittsgehalt der Männer daher: $47250 : 21 = 2250$

b) Gleichungsansatz (gewichtetes arithmetisches Mittel)
$2150 \cdot 28 = 1850 \cdot 7 + x \cdot 21 \Rightarrow x = 2250$

Angesprochene Kompetenz: H2-I4-K2

H2: Die Aufgabe verlangt die operative Ermittlung einer Maßzahl.

I4: Bei der verlangten Maßzahl (arithmetisches Mittel) handelt es sich um ein statistisches Zentralmaß.

K2: Die Aufgabe erfordert die mehrfache verständige Anwendung der Beziehung $\sum x_i = n \cdot \bar{x}$ (bzw. des Konzepts des gewichteten arithmetischen Mittels) sowie entsprechende arithmetische Rechenschritte (oder Lösung einer linearen Gleichung bzw. Umformung der Formel des gewichteten arithmetischen Mittels).

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H2: Rechnen, Operieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Tippfehler

Laura hat auf ihrem PC zehn Zahlen eingetippt und mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms das arithmetische Mittel dieser zehn Zahlen berechnet: Der angezeigte Wert beträgt 4260.
Leider hat sich Laura bei der Zahleneingabe bei einer Zahl vertippt und statt 2100 den Wert 1200 eingegeben.

Aufgabe: Kreuze an, welche der folgenden Aussagen für die richtigen zehn Zahlen zutreffend ist.

Lösung:

- ☐ Das arithmetische Mittel ist 3360.
- ☐ Das arithmetische Mittel ist 4170.
- ☐ Das arithmetische Mittel ist 4260.
- ☐ Das arithmetische Mittel ist 4350.
- ☐ Das arithmetische Mittel ist 5160.
- ☐ Man kann nicht sagen, welchen Wert das arithmetische Mittel hat.

Richtige Lösung:

Das arithmetische Mittel ist 4350.

Hinweise zur Lösung:

Wenn von 10 Zahlen eine um 900 zu klein ist, dann ist die Summe dieser 10 Zahlen um 900 zu klein und somit das arithmetische Mittel um 90 zu klein.
Auch etwas andere Überlegungen führen zu diesem Ergebnis, z. B.:
$(4260 \cdot 10 + 900) : 10 = 4350$

Angesprochene Kompetenz: H2-I4-K3

H2: Die Aufgabe bezieht sich auf die Wirkung einzelner Zahlenwerte bei der Berechnung einer Maßzahl, sie fokussiert also auf eine operative Tätigkeit.

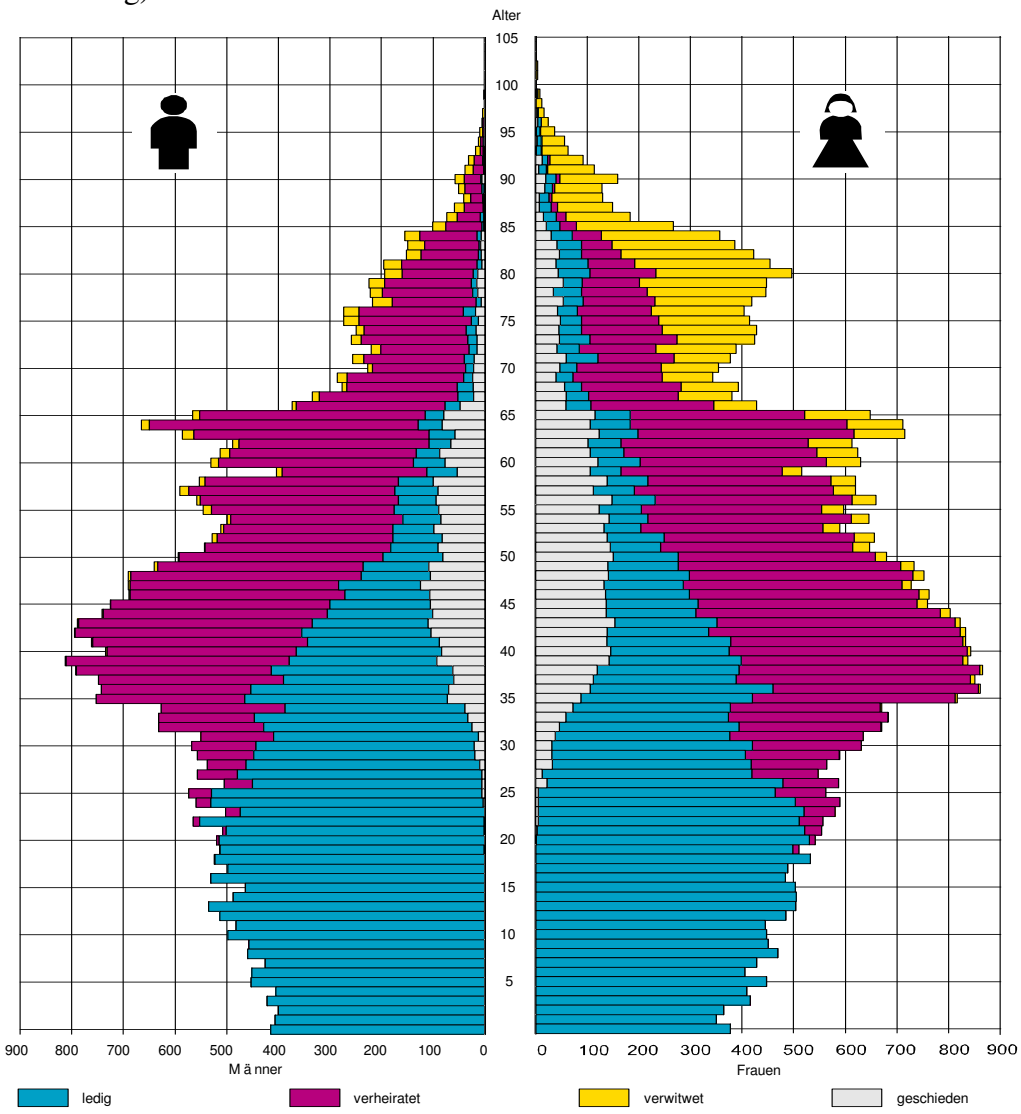
I4: Den mathematischen Kontext bildet ein statistisches Zentralmaß.

K3: Die Aufgabe erfordert zwar auch operative Tätigkeiten, sie erfordert vor allem aber Reflexion(swissen) über die Auswirkung der Veränderung von Zahlenwerten bei der Ermittlung des arithmetischen Mittels.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H3: Interpretieren
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Bevölkerungspyramide

Die folgende Grafik zeigt die Altersverteilung der Klagenfurter Bevölkerung im Jahre 2001 (letzte Volkszählung).



Aufgabe: Ermittle anhand der Grafik näherungsweise, wie viele ledige Männer im Alter von 35 Jahren es im Jahre 2001 in Klagenfurt gab.

Lösung: Im Jahre 2001 gab es in Klagenfurt ca. …… ledige Männer im Alter von 35 Jahren.

Richtige Lösung:

Im Jahre 2001 gab es in Klagenfurt ca. 400 ledige Männer im Alter von 35 Jahren.

Hinweise zur Lösung:

Angaben zwischen 370 und 430 sollten als richtige Antworten gewertet werden.

Angesprochene Kompetenz: H3-I4-K1

H3: Die Aufgabe verlangt die Interpretation einer grafischen Darstellung.

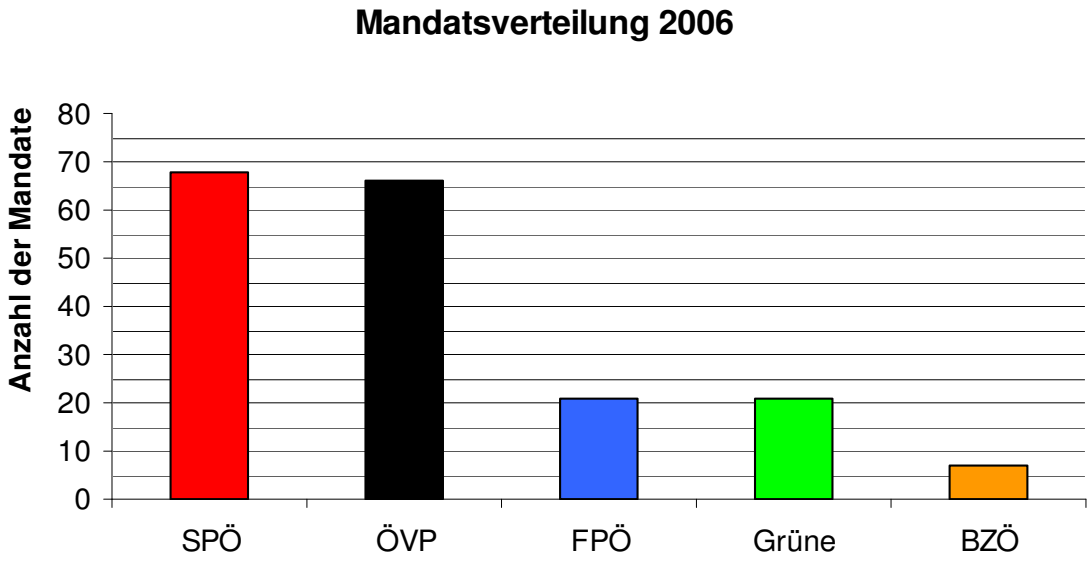
I4: Bei der Grafik handelt es sich um eine grafische Darstellung aus dem Bereich der Statistik.

K1: Eine (etwas komplexere) Grafik ist verständig zu erfassen und ein bestimmter Wert zu ermitteln.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H3: Interpretieren
K2: Herstellen von Verbindungen

Mandatsverteilung im österreichischen Parlament

Aufgrund der Nationalratswahl 2006 ergab sich für das österreichische Parlament folgende Mandatsverteilung:



Aufgabe: Für bestimmte Parlamentsbeschlüsse sind Zwei-Drittel-Mehrheiten erforderlich.
Welche Parteien können mit ihren Stimmen (Mandaten) einen derartigen Beschluss verhindern? (In der Lösung bitte Zutreffendes ankreuzen.)

Lösung:

	kann Beschluss **verhindern**	kann Beschluss **nicht verhindern**
SPÖ	☐	☐
ÖVP	☐	☐
FPÖ + GRÜNE zusammen	☐	☐
Die drei Kleinparteien zusammen	☐	☐

Richtige Lösung:

Von den angeführten Parteien können sowohl die SPÖ wie auch die ÖVP einen solchen Beschluss verhindern; die FPÖ + GRÜNE wie auch alle drei Kleinparteien gemeinsam können einen derartigen Beschluss nicht verhindern.

Hinweise zur Lösung:

Man kann durch Ablesen der Mandate und rechnerische Ermittlung der Anteile zu den richtigen Antworten kommen, man kann sich den Sachverhalt aber auch durch gedankliche grafische Manipulation verdeutlichen: Die Stäbe von FPÖ, GRÜNE und BZÖ reichen auch übereinander gelegt nicht an ÖVP und SPÖ heran. Da sich die Mandatszahlen von ÖVP und SPÖ nur wenig voneinander unterscheiden, müssen beide jeweils über mehr als ein Drittel aller Mandate verfügen.

Angesprochene Kompetenz: H3-I4-K2

H3: Die Aufgabe verlangt vor allem die richtige Interpretation einer grafischen Darstellung.

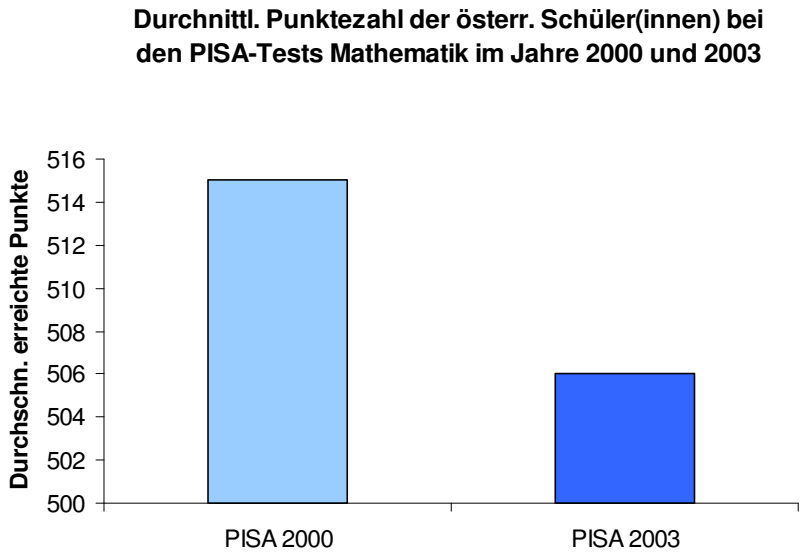
I4: Bei der grafischen Darstellung handelt es sich um ein Stabdiagramm, also um eine grafische Darstellung aus dem Bereich der Statistik.

K2: Es sind hier mehrere Denkschritte/Tätigkeiten geeignet miteinander zu verbinden: Man wird z. B. zunächst von der Zwei-Drittel-Mehrheit darauf schließen, dass mehr als ein Drittel der Mandate genügt, um diese zu verhindern (Textinterpretation). Man muss dann ermitteln, wie viele Mandate es insgesamt gibt und wie viele davon ein Drittel ausmachen. Dann muss man herausfinden, welche der angegebenen Parteien bzw. Koalitionen über mehr als ein Drittel der Mandate verfügen.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H3: Interpretieren
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

PISA-Ergebnisse

Das folgende Diagramm zeigt, dass die von österreichischen Schülerinnen und Schülern beim PISA-Test Mathematik im Jahre 2003 durchschnittlich erzielten Punkte geringer waren als die im Jahre 2000 erzielten Punkte:



Unter Verweis auf obige Grafik sprachen österreichische Tageszeitungen nach Bekanntwerden der Testergebnisse 2003 von einem katastrophalen „Absturz“, einem „PISAster“.

Aufgabe: Warum ist eine derartige Interpretation der angegebenen Grafik nicht angemessen?

Lösung:

Richtige Lösung:

Weil der Unterschied zwischen 515 und 506 Punkten relativ gering ist, sodass kaum von einem „Absturz“ oder einem „PISAster“ gesprochen werden kann.
Oder:
Weil die Stäbe nicht bei 0 sondern erst bei 500 beginnen und daher die Punktezahlen nicht im richtigen (Größen-)Verhältnis zueinander darstellen.

Hinweise zur Lösung:

Als richtig zu bewertende Antworten verweisen darauf, dass die im Stabdiagramm gezeichneten Stäbe nicht die tatsächlichen Größenverhältnisse darstellen, da die Stäbe nicht in voller Länge gezeichnet wurden (nicht bei 0 sondern erst bei 500 beginnen); der tatsächliche Größenunterschied der Stäbe ist eher gering.
Ebenfalls richtig zu bewerten wären Antworten, die auf den geringen relativen Größenunterschied der gezeichneten Werte (9 Punkte von mehr als 500, weniger als 2%) verweisen.

Angesprochene Kompetenz: H3-I4-K3

H3: In dieser Aufgabe geht es um die Interpretation einer grafischen Darstellung.

I4: Bei der grafischen Darstellung handelt es sich um ein Stabdiagramm, also um eine grafische Darstellung aus dem Bereich der Statistik.

K3: Eine vorgegebene Interpretation des (manipulativ) gezeichneten Stabdiagramms soll kritisch reflektiert werden.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H4: Argumentieren, Begründen
K1: Einsetzen von Grundkenntnissen und -fertigkeiten

Arithmetisches Mittel

In einem Betrieb mit 5 Mitarbeiter(inne)n fallen monatlich die Bruttogehälter b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 an. Das arithmetische Mittel dieser Bruttogehälter beträgt $\overline{b}$.

Aufgabe: Zeige, dass die Summe der einzelnen Bruttogehälter gleich dem 5-fachen des arithmetischen Mittels $\overline{b}$ ist!

Lösung:

Richtige Lösung:

$$\overline{b} = \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5}{5} \Leftrightarrow 5 \cdot \overline{b} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5$$

Angesprochene Kompetenz: H4-I4-K1

H4: Die Aufgabe erfordert eine mathematische Begründung (Beweis).

I4: Es ist eine Eigenschaft eines statistischen Zentralmaßes (arithmetisches Mittel) zu beweisen.

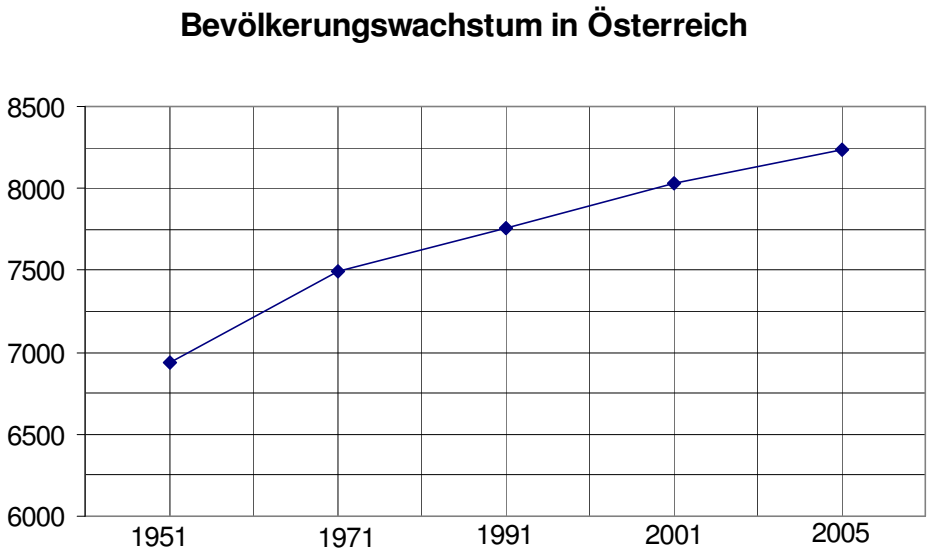
K1: Es handelt sich um einen einschrittigen Beweis einer elementaren Eigenschaft des arithmetischen Mittels.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H4: Argumentieren, Begründen
K2: Herstellen von Verbindungen

Bevölkerungswachstum in Österreich

Man weiß, dass die Bevölkerung Österreichs in den Jahren 1971 – 1991 recht langsam, in den Jahren 2001 – 2005 besonders rasch gewachsen ist.

Aufgabe: Begründe, warum dieses Wachstumsverhalten in der angegeben Grafik nicht erkennbar ist!



Lösung:

Richtige Lösung:

Die Steigung der den Strecken zugrunde liegenden Geraden kann als ein Maß dafür gesehen werden, wie rasch die Bevölkerung wächst. Um Steigungen von Geraden optisch vergleichen zu können, müssen die Geraden in gleich skalierten Koordinatensystemen eingezeichnet sein. In der vorliegenden Grafik ist die x-Achse nicht metrisch skaliert (z. B. ist der Abstand von 1971 – 1991 gleich groß wie jener von 2001 – 2005 gezeichnet). Dadurch wird die Steigung zwischen den Messwerten verschieden dargestellt (manipulativ verändert).

Hinweise zur Lösung:

Ähnliche (auch weniger ausführliche) Formulierungen, die auf die Manipulation durch unangemessene Skalierung der waagrechten Achse verweisen, sollten als richtige Antworten gewertet werden.

Angesprochene Kompetenz: H4-I4-K2

H4: Es wird eine Begründung gefordert, die sich auf mathematische Sachverhalte/Regeln stützt.

I4: Es geht um statistische Daten und deren grafische Darstellung in Form eines (nicht korrekten) Liniendiagramms.

K2: Man muss „rascher wachsen“ als größere Steigung der den Strecken zugrunde liegenden Geraden interpretieren und muss dies mit einer (in der Grafik nicht realisierten) metrischen Skalierung in Verbindung bringen, um eine entsprechende Begründung angeben zu können.

I4: Statistische Darstellungen und Kenngrößen
H4: Argumentieren, Begründen
K3: Einsetzen von Reflexionswissen, Reflektieren

Durchschnittliches Monatsgehalt

Für die sieben Mitarbeiter(innen) eines Betriebes fallen monatlich folgende Bruttogehälter (in €) an:

1.240,- 980,- 8.760,- 950,- 1.200,- 1.120,- 1.500,-

Aufgabe: Die Berechnung des arithmetischen Mittels dieser Bruttogehälter liefert einen um mehr als € 1.000,- höheren Wert als der Median. Kreuze an, welche Gründe es dafür geben könnte.

Lösung:

	trifft zu	**trifft nicht zu**
Beim arithmetischen Mittel werden alle Gehälter addiert, daher muss das arithmetische Mittel immer größer sein als der Median.		
Beim Median wirkt sich der hohe Wert 8.760,- nicht sehr stark aus, beim arithmetischen Mittel hingegen schon.		
Beim Median wirken sich die beiden niedrigen Gehälter (unter € 1.000,-) sehr stark aus.		
Da der Median den zufällig in der Mitte stehenden Wert (hier 950,-) angibt, kann der Median auch ein (im Vergleich zu den anderen Werten) sehr niedriger Wert sein.		

Richtige Lösung:

Die Argumentation „*Beim Median wirkt sich der hohe Wert 8.760,- nicht sehr stark aus, beim arithmetischen Mittel hingegen schon*“ ist zutreffend, die drei anderen Argumentationen sind als Begründungen für den vorliegenden Sachverhalt nicht geeignet.

Angesprochene Kompetenz: H4-I4-K3

H4: In dieser Aufgabe geht es um Begründungen auf der Basis mathematischer Sachverhalte/Eigenschaften.

I4: Den mathematischen Kontext bilden zwei statistische Zentralmaße.

K3: Die Aufgabe erfordert Reflexion(swissen) und eine vergleichende Beurteilung der Auswirkung extremer Werte („Ausreißer“) bei der Ermittlung des arithmetischen Mittels bzw. des Medians sowie eine Überprüfung/Beurteilung von unterschiedlichen Argumentationen.