Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“

KORREKTURANLEITUNGEN

zum Testheft D

D401 Räumungsverkauf

Lösung: $r = \frac{P_1 - P_2}{P_1}$

Bemerkung: Die Aufgabe gilt dann als richtig gelöst, wenn der angegebene Term oder ein dazu äquivalenter angegeben ist. „Vorzeichenfehler“ werden nicht toleriert.
Eine richtig angegebene Formel für p statt für r wird aber als richtig gewertet.

D402 Arbeitslose

Lösung: (i) etwa: **Die Arbeitslosenzahl 2010 beträgt 92% der Arbeitslosenzahl 2005.**
oder: **Die Arbeitslosenzahl hat von 2005 bis 2010 um 8% abgenommen.**

Bemerkung: Alle sinngemäß richtigen Formulierungen, die sich auf 0,92 beziehen, werden als richtig gewertet.

(ii) etwa: **Die Arbeitslosenzahl hat im Zeitraum 2005 bis 2010 durchschnittlich um 4000 pro Jahr abgenommen.**

Bemerkung: Alle sinngemäß richtigen Formulierungen, die sich auf –4000 beziehen, werden als richtig gewertet.

Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Aufgabenteile richtig gewertet sind.

D403 Quadratische Gleichung

Lösung: $a < -0{,}8$

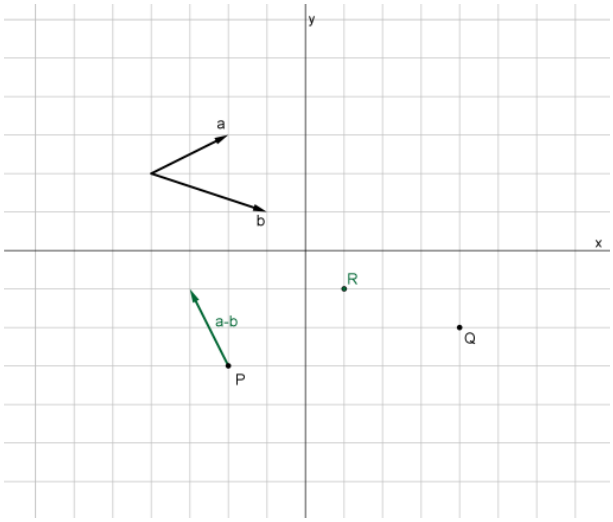
Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn für a eine explizite Ungleichung (Grenze auch in Bruchschreibweise) bzw. eine verbale Beschreibung gegeben wird. Die Angabe von lediglich einem oder mehreren konkreten Beispielen wird nicht als richtig gewertet.

D404 Altersverteilung

Lösung: etwa: **Anzahl aller Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter**

D405 Punkte und Pfeile

Lösung:



Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn sowohl der Pfeil als auch der Punkt deutlich sichtbar richtig eingezeichnet sind. (Eine entsprechende Beschriftung ist erwünscht, aber nicht erforderlich.)

D406 Parallelogramm

Lösung: $\overrightarrow{BD} = -\vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$

Bemerkung: Alle zu den angeführten Termen äquivalente Terme werden als richtig gewertet.

D407 Parallele Gerade

Lösung: h: $X = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Alle richtigen <u>Parameter</u>darstellungen werden als richtig gewertet, auch wenn der Koordinatenursprung als Startpunkt gegeben ist.
(Andere Geradengleichungen werden nicht als richtige Lösungen gewertet.)

D408 Normale Gerade

Lösung: $v_3 = \mathbf{5}$

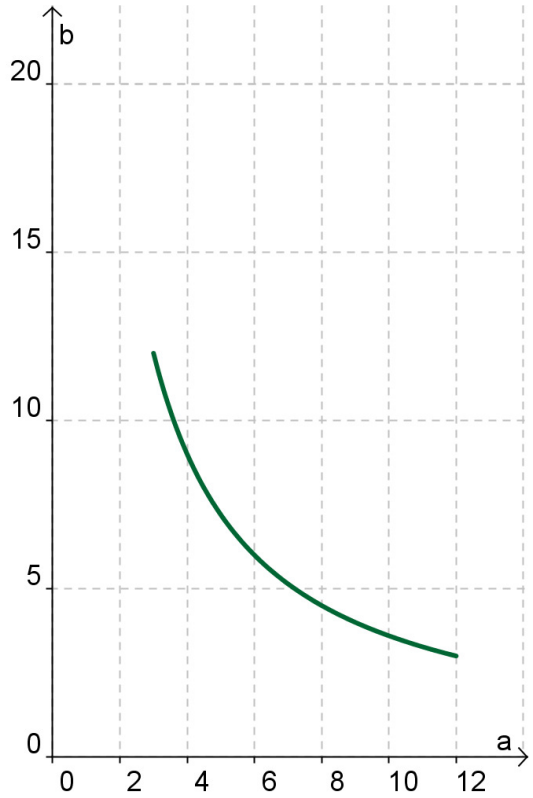
D409 Schatten

Lösung: $s = \dfrac{h}{\tan(65°)}$

Bemerkung: Wenn aus einer Skizze ersichtlich ist, dass der Höchststand von 65° irrtümlich statt als Höhenwinkel als der dazu komplementäre Winkel interpretiert wurde, wird die Lösungsformel $s = h \cdot \tan(65°)$ in diesem Fall folgerichtig als richtig gewertet. (Wenn keine Skizze vorhanden ist, wird diese Formel nicht als richtig gewertet.)

D410 Zusammenhang zwischen Rechteckseiten

Lösung:



Bemerkung: Die Zeichnung kann etwas ungenau sein.
Anforderungen: Startpunkt, Endpunkt und zumindest ein Zwischenpunkt müssen richtig (± 3mm) eingezeichnet sein. Der Graph muss eine durchgezogene, gekrümmte Kurve sein.

D411 Nachfrage

Lösung: $m(p) = \mathbf{-20 \cdot p + 160}$

Bemerkung: Äquivalente Terme werden als richtig gewertet.

D412 Bevölkerungsentwicklung

Lösung: etwa: *d:* **Bevölkerungszahl Namibias 1990**
k: **Durchschnittliche jährliche Veränderung der Bevölkerungszahl Namibias seit 1990**

Bemerkung: Auch etwas andere Formulierungen, die im Kern richtig sind, werden als richtig gewertet. Auch „Zunahme“ statt „Veränderung“ wird toleriert.

Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Antworten richtig gewertet sind.

D413 Radioaktiver Zerfall

Lösung: Die Anzahl der Caesium 137 Atome nimmt täglich um ca. **2,3**% ab.

Bemerkung: Andere Rundungsgenauigkeiten (auch zB 2%) werden als richtig gewertet; Rundungsfehler werden toleriert.

D414 Sinusfunktion

Lösung: $f_2(x) = \mathbf{2 \cdot \sin(x)}$ $f_3(x) = \mathbf{\sin(4 \cdot x)}$

Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Terme richtig angegeben sind.

D415 Eigenschaften von Funktionen

Lösung:

	$f_1(x) = 3 - x^3$	$f_2(x) = e^x$
... hat für alle $x < 0$ positive Funktionswerte	⊗	⊗
... ist für alle $x > 0$ monoton steigend	○	⊗
... hat einen Wendepunkt	⊗	○

Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn alle Kreuzchen richtig gesetzt sind.

D416 Bruttosozialprodukt

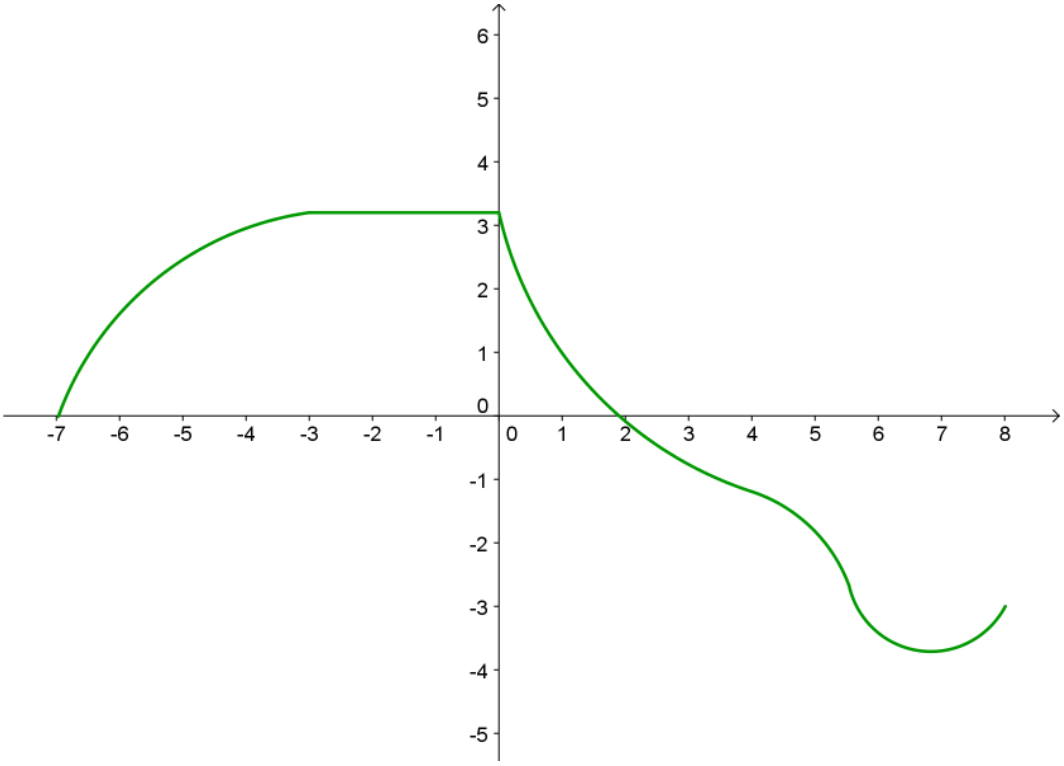
Lösung:

	zutreffend	nicht zutreffend
f' fällt in diesen fünf Jahren monoton.	⊗	○
Die Werte von f' sind in diesen fünf Jahren negativ.	○	⊗
Die Werte von f'' sind in diesen fünf Jahren negativ.	⊗	○
f fällt in diesen fünf Jahren monoton.	○	⊗
Der Wert des Differentialquotienten von f wird im Laufe dieser fünf Jahre kleiner.	⊗	○

Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn in mindestens vier Zeilen das Kreuzchen richtig gesetzt ist.

D417 Funktionsgraphen zeichnen

eine mögliche *Lösung*:



Bemerkung: Die Aufgabe wird als richtig gewertet, wenn höchstens eine Anforderung nicht erfüllt ist; die Verwechslung von links- und rechtsgekrümmt zählt dabei als eine (nicht erfüllte) Anforderung.

D418 Übungs-Patrone

Lösung: (i) $s(t) = \int_0^4 v(t) \cdot dt$ oder auch $s(t) = \int_0^4 v_0 \cdot e^{-0,4 \cdot t} \cdot dt$

(ii)

Bemerkung: In (i) wird das Fehlen des „dt“ und/oder des „(t)“ toleriert.

Bemerkung: Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Aufgabenteile richtig gewertet sind.

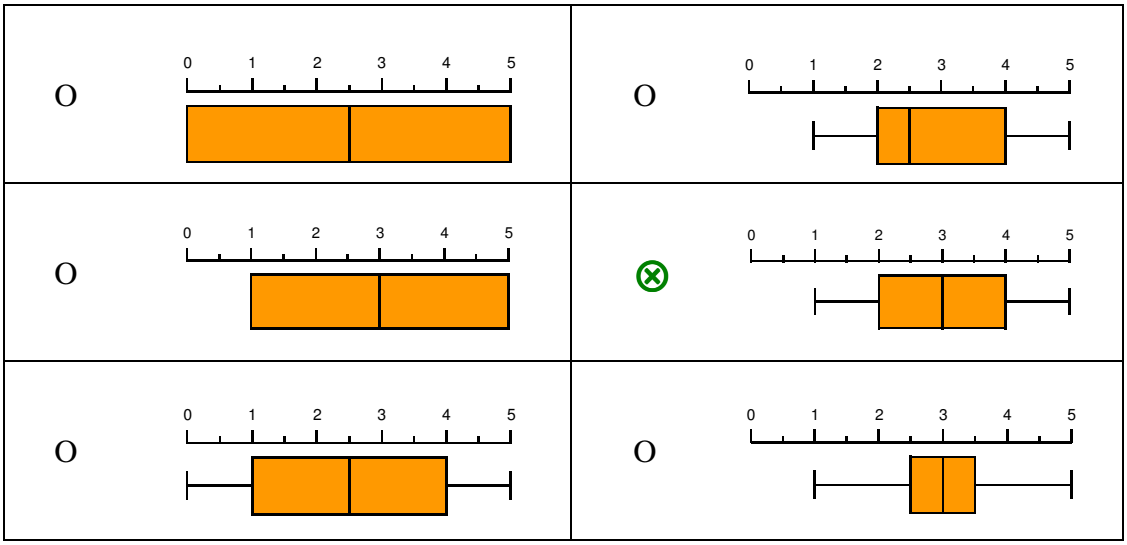
D419 Messebesucher(innen)

Lösung: Alle Grafiken, in denen der Höhenunterschied zumindest absolut deutlich größer erscheint, werden als richtig gewertet.

Bemerkung: Dazu ist eine Vergrößerung der Skaleneinheit auf der senkrechten Achse erforderlich, eine Stabunterbrechung ist nicht erforderlich. Auch kann der sichtbare Skalenausschnitt auf der senkrechten Achse verändert werden (muss aber nicht).

D420 Testergebnisse

Lösung:



D421 Zufällige Auswahl

Lösung: $P(W) = \frac{59}{95}$ $P(Z) = \frac{37}{95}$

$P(W|Z) = \frac{17}{37}$ $P(Z|W) = \frac{17}{59}$

$P(Z \text{ und } W) = \frac{17}{95}$

Bemerkung: Die Aufgabe wird als richtig gewertet, wenn mindestens vier der fünf Werte richtig angegeben sind. (Das Verwechseln der beiden bedingten Wahrscheinlichkeiten zählt als zwei Fehler.)
Die Werte können in Bruch- oder Dezimaldarstellung, auch in Prozentschreibweise angegeben werden. Rundungsfehler werden toleriert.

D422 Weinflaschen

Lösung: etwa: **Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Weinflasche zu wenig Füllmenge (weniger als 0,75 Liter) hat, beträgt ca. 0,05.**

oder: **Ca. 5% aller Flaschen werden mit weniger als 0,75 Liter gefüllt.**

Bemerkung: Auch etwas andere Formulierungen, die im Kern richtig sind, werden als richtig gewertet.

D423 Studierende an der Veterinärmedizinischen Universität Wien

Lösung:

(i) **$S_{0,95}(H) = [72; 88]$**

(ii) etwa: **Mit 95% Wahrscheinlichkeit werden in dieser Stichprobe zwischen 72 und 88 weibliche Studierende sein.**

Bemerkung: In (ii) werden auch etwas andere Formulierungen, die im Kern richtig sind, als richtig gewertet. Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Aufgabenteile richtig gewertet sind.

D424 Konfidenzintervalle

Lösung:

(i) **Die Intervallbreite 2ε wird kleiner.**

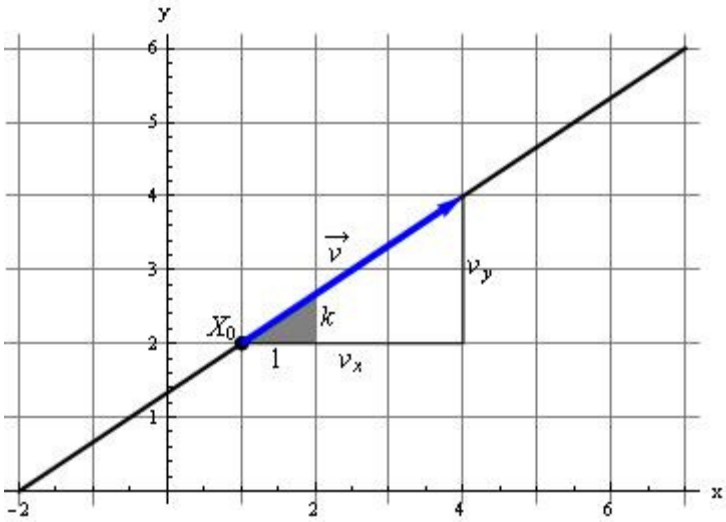
(ii) **Der Stichprobenumfang n wird kleiner.**

Bemerkung: Auch etwas andere Formulierungen, die im Kern richtig sind, werden als richtig gewertet. Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn beide Aufgabenteile richtig gewertet sind.

D491 [Wahlaufgabe] **Anstieg einer Geraden**

Lösungsskizze:

(1) Parameterdarstellung einer Geraden



g: $X = X_0 + t \cdot \vec{v}$

Der Anstieg *k* der Geraden *g* ergibt sich aus dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$: $k = \frac{v_y}{v_x}$

Konkretes Beispiel:

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{2}{3}$

(2) Steigung k einer linearen Funktion

$f(x) = k \cdot x + d$:

Vergrößert man der Argumentwert *x* um 1, so ändert sich der Funktionswert $y = f(x)$ um den Wert *k*. Es gilt: $f(x+1) = f(x) + k$

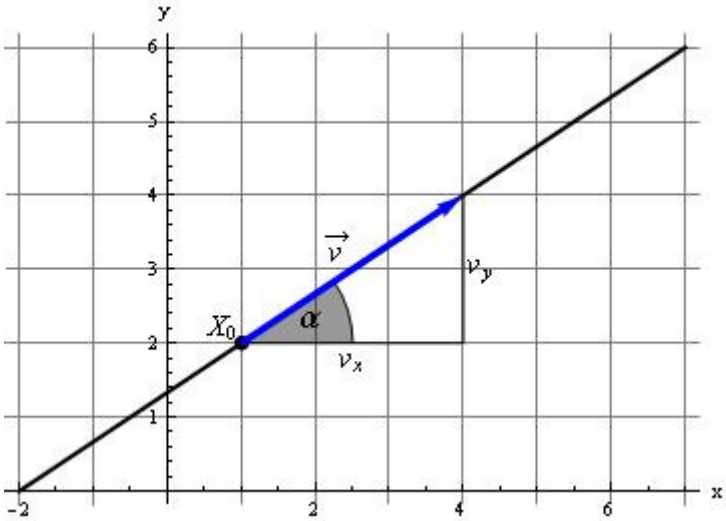
Konkretes Beispiel: $f(x) = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$; siehe obige Gerade als Funktionsgraph gedeutet.

Zusammenhang Richtungsvektor – Anstieg *k* einer linearen Funktion:

Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ sind parallel.

Aus dem zweiten Vektor ist der Anstieg $k = \frac{2}{3}$ unmittelbar ablesbar.

(3) Steigungswinkel bzw. Steigung in %



Der Anstieg einer Geraden kann durch den Steigungswinkel α angegeben werden. Das ist der Winkel, den die Gerade mit der x-Achse einschließt.

Zusammenhang mit dem Richtungsvektor:

$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x}$ bzw.

$\tan\alpha = k$

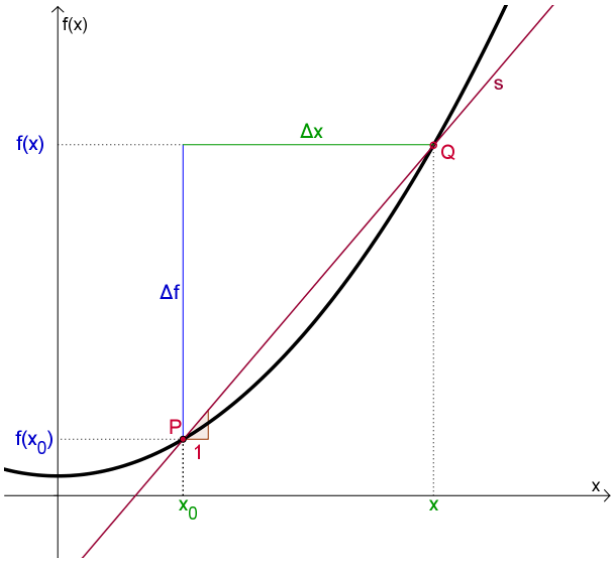
Konkretes Beispiel: $\alpha = \arctan\frac{2}{3} = 33{,}7°$

Die Steigung einer Geraden als Prozentangabe: Steigt beispielsweise eine Straße um *p* %, so bedeutet dies, dass die Straße pro 100 Meter Horizontalentfernung um *p* Meter steigt.

Zusammenhang mit dem Steigungswinkel: $\tan\alpha = k \Leftrightarrow p = k \cdot 100\,\%$

(4) Der Differenzenquotient

Der Differenzenquotient einer Funktion f für das Intervall $[x_0; x]$: $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=k_s$ ist gleich der Steigung k_s der Sekante durch die beiden Punkte $P(x_0|y_0)$ und $Q(x|y)$, mit $y=f(x)$ und $y_0=f(x_0)$.



Konkret für f(x) = 0,1·x² + 1 und das Intervall [5; 15]:

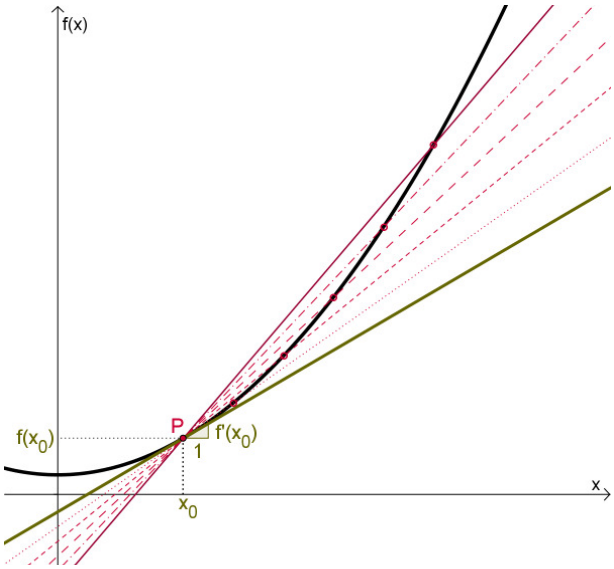
$$\frac{f(15)-f(5)}{15-5}=\frac{22{,}5-2{,}5}{15-5}=2$$

$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Sekante; die Berechnung der Sekantensteigung aus diesem Vektor führt zum Differenzenquotienten.

(5) Der Differentialquotient

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ gibt die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(x_0|f(x_0))$.

Konkret für f(x) = 0,1·x² + 1 und x_0 = 5:
f'(x)=0,2·x; f'(5)=1



Zusammenhang Differenzenquotient – Differentialquotient:
Für $x \approx x_0$ gilt die Näherung:

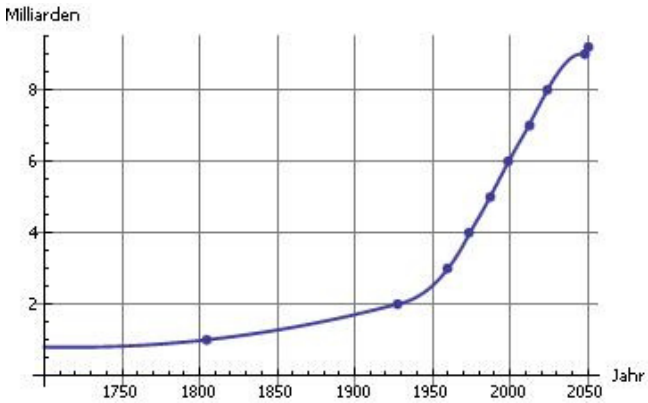
$$f'(x_0)\approx\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Bemerkungen: Für die ausführliche Beschreibung eines Aspektes (allgemein, konkret, illustriert) wird je Aspekt ein Punkt vergeben, insgesamt höchstens 5 Punkte. (Als „Zwischenwertung“ kann dabei auch in halben Punkten gerechnet werden, wenn die Beschreibung an manchen Stellen nicht ausführlich genug ist.)
Für das Aufzeigen entsprechender Zusammenhänge werden insgesamt höchstens drei Punkte vergeben. Zusammenhänge zwischen einzelnen Aspekten können auch implizit in den Erläuterungen enthalten sein.
Die errechnete Punktesumme wird auf Ganze gerundet.

D492 [Wahlaufgabe] Weltbevölkerung

Lösungsskizze:

a) i)



ii) Die Funktion W ist im gezeichneten Intervall streng monoton wachsend; es gibt daher kein Extremum, aber einen Wendepunkt in der Nähe von $t = 2000$. D.h.: die Funktion W ist zunächst linksgekrümmt ($t < 2000$) mit positiver zweiter Ableitung, danach rechtsgekrümmt mit negativer zweiter Ableitung.
Im Kontext: Nach einer längeren Phase geringeren Wachstums kommt es um die Mitte des 20. Jahrhunderts zu einer markanten Beschleunigung des Wachstums; in der zweiten Hälfte geht dieses in ein nahezu lineares Wachstum über, in dem wir uns derzeit (2012) offensichtlich noch befinden. Die prognostizierten Daten zeigen eine Wachstumsbremse ab etwa 2030.

b) Kennt man die Werte $W(t)$ an den Intervallgrenzen, also für $t = 1700$, $t = 1710$, etc., so kann man daraus jeweils eine Stabhöhe, also den durchschnittlichen Zuwachs pro Jahr in einem 10-Jahres-Intervall berechnen: $H_i = \dfrac{W(i+5) - W(i-5)}{10}$

c) Die Stabhöhen H_i – die durchschnittlichen jährlichen Änderungen der Funktion W in den einzelnen 10-Jahres-Intervallen – sind die Differenzenquotienten der glatten Funktion W für die Intervalle $[W(i–5); W(i+5)]$ mit $i = 1705, 1715, \ldots$ (Δt=10).

Mit $\Delta t \to 0$ gehen diese Differenzenquotienten in die entsprechenden Differentialquotienten an den Stellen $t = i$ über; aus der Treppenfunktion wird die (glatte) Ableitungsfunktion Z.

d) Das Integral gibt die Summe aller Zuwächse der Weltbevölkerung zwischen 1700 und 2010 an, somit die Weltbevölkerungszunahme zwischen 1700 und 2010.

Bemerkungen:

zu a) Ein Punkt für eine richtige Zeichnung zu (i).

Die obige Antwort zu (ii) ist als Maximalvariante zu verstehen. Die Minimalvariante soll die in der Aufgabenstellung geforderten Eigenschaften ansprechen (Monotonie, Extremwerte, Wendestellen bzw. Krümmung) und eine Kontextbeschreibung, die auch auf bestimmte Zeitabschnitte eingeht. Je ein bis zwei Punkte je nach Ausführlichkeit der Beschreibung, insgesamt maximal 3 Punkte.

zu b) Ein Punkt für eine richtige Formel.

zu c) Die Antwort soll zwei Aspekte enthalten: H_i als Differenzenquotient von W und den Grenzübergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten.
→ je ein Punkt.

zu d) Ein Punkt für eine richtige Antwort.

D493 [Wahlaufgabe] Einkommensteuer in Österreich

Lösungsskizze:

a)

Stufe	Einkommen e (in €)	Einkommensteuer st (in €)
0	$e \leq 11000$	$st = 0$
1	$11000 < e \leq 25000$	$st = (e - 11000) \cdot 0{,}365$
2	$25000 < e \leq 60000$	$st = (e - 25000) \cdot 0{,}432143 + 5110$
3	$e > 60000$	$st = (e - 60000) \cdot 0{,}5 + 20235$

b) i) Für Einkommen unter 11000 € (Stufe Null) ist der Steuersatz gleich Null. Für jede der drei weiteren Einkommensstufen wächst der effektive Steuersatz streng monoton; der Graph ist jeweils rechtsgekrümmt (die 2. Ableitung ist negativ), d.h. die Zunahme des effektiven Steuersatzes *st* wird mit steigendem Einkommen *e* immer geringer. An den Stufengrenzen ist der Graph geknickt, d.h. der Anstieg des effektiven Steuersatzes wird sprunghaft größer (Sprungstelle der ersten Ableitung). Es gibt weiters eine Höchstgrenze von 50% für jeden Steuersatz. Für unbegrenzt steigende Einkommen nähert sich der effektive Steuersatz asymptotisch dieser Höchstgrenze an.

ii) Der mittlere Anstieg des effektiven Steuersatzes in der Tarifzone 1:

$$\frac{st(25000) - st(11000)}{14000} = 0.0000146 \Rightarrow 0.00146\,\%\ pro\ € \approx 1.5\ \%/1000\,€$$

Der mittlere Anstieg in der Tarifzone 2:

$$\frac{st(60000) - st(25000)}{35000} = 0.0000038 \Rightarrow 0.00038\,\%\ pro\ € \approx 0.38\ \%/1000\,€$$

c) Die Einkommensteuer verringert sich für Einkommen über 14 000 € um den Fixbetrag von 1095 €, unabhängig von der Einkommensstufe.

Bemerkungen:

zu a) Alle äquivalenten Formeln werden als richtig gewertet. Je richtiger Formel wird ein Punkt vergeben, gesamt maximal drei Punkte.

zu b, i): Die vollständige Beschreibung sollte enthalten: Nullstelle, Monotonie, Krümmungsverhalten, Beschränktheit, Verhalten an den Intervallgrenzen. [maximal 2 Punkte]. Für die Erklärung zu den Knickstellen: ein weiterer Punkt.

zu b, ii): Ein Punkt für die richtige Berechnung beider Werte.

zu c) Ein Punkt für die richtige Antwort.

D494 [Wahlaufgabe] Lichtwellenleiter

Lösungsskizze:

a) Die Werte in der zweiten Spalte sind der Grafik entnommen. Daraus wird die prozentuelle Abnahme je 1000m-Intervall berechnet:

Leiterlänge in m	Lichtintensität in % von *I(0)*	prozentuelle Abnahme je 1000 m
0	100	
1000	79	21,0
2000	62	21,5
3000	49	21,0
4000	38	22,4
5000	30	21,1

Die prozentuelle Abnahme der Lichtintensität pro 1000 Meter Kabellänge ist näherungsweise konstant. Das spricht für ein exponentielles Modell.

b) Funktionsgleichung, hier aus Wertepaaren bei 0 und 5000m Leiterlänge mit x in m:

$I(x) = I(0) \cdot 0{,}999759^x$ bzw. $I(x) = I(0) \cdot e^{-0{,}000242132 \cdot x}$

Die prozentuelle Abnahme der Lichtintensität, hier aus Wertepaaren bei 0m und 5000m bzw. 0km und 5km Leiterlänge ergibt etwa:

0,024% pro m; 21,4% pro km.

c) Nach etwa 6647 Metern ist die Lichtintensität auf 20% des Ausgangswertes gesunken. Das ist die Entfernung zwischen den einzelnen Verstärkern.
Der Verlauf des Graphen:

Bemerkungen:

zu a) Auch andere Lösungswege sind sinnvoll:
prozentuelle Veränderungen jeweils vom Ausgangswert berechnen;
aus zwei Wertepaaren Gleichung einer Exponentialfunktion ermitteln (vgl. b), Modellwerte mit abgelesenen Werten vergleichen;
... Graph dieser Funktion im Diagramm einzeichnen, Abweichungen grafisch bewerten;
etc.
Für eine schlüssige und nachvollziehbare Beurteilung inklusive Begründung: maximal zwei Punkte. (zB für eine sinnvolle Vorgangsweise ohne explizite Begründung nur ein Punkt).

zu b) Die Funktionsgleichung kann je nach Verwendung eines entsprechenden Wertepaares bzw. eines gerundeten Wertes für die in a) untersuchten Abnahmeraten auch etwas andere Parameter aufweisen; sie kann m oder km als Argumentschrittweite verwenden. Ein Punkt für eine richtige Gleichung.
Je ein Punkt für je eine richtige Antwort zu den Abnahmewerten.

zu c) Für die richtige Berechnung des Verstärkerabstandes 1 Punkt, für die Grafik maximal zwei Punkte.