Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik

Schulversuch 9. Mai 2012

Korrekturhinweise



Institut für Didaktik der Mathematik Österr. Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik Alpen-Adria-Universität Klagenfurt



Stella-Klein-Löw-Weg 15 / Rund Vier B, 2. OG 1020 Wien

Aufgaben vom Typ I

I. 1 Umrechnung zwischen verschiedenen Temperatureinheiten

Lösung:
$$C = \frac{(F-32)\cdot 5}{9}$$

Die Aufgabe ist auch für jeden zu $\frac{(F-32)\cdot 5}{9}$ äquivalenten Term als richtig zu bewerten.

I. 2 Umsätze

Lösung: Der Umsatz ist im zweiten Jahr (gegenüber dem ersten Jahr) um 4% zurückgegangen.

Andere Formulierungen, aus denen deutlich wird, dass es sich um einen Umsatzrückgang von 4% im zweiten Jahr handelt, sind als richtig zu bewerten.

I. 3 Quadratische Gleichung

Lösung: a < 25/4

Andere korrekte Angaben (zB mit Dezimalzahl, "alle a kleiner als 25/4" o. Ä.) sind als richtig zu werten.

I. 4 Lauftraining

Lösung: Arithmetisches Mittel der Laufzeiten.

Andere Formulierungen/Beschreibungen, die den Sachverhalt im Kontext korrekt wiedergeben (zB "durchschnittliche Laufzeit (für einen 200-m-Lauf)"), sind als richtig zu bewerten.

I. 5 Punkte und Pfeile

Lösung:

$R = P + t \cdot \vec{c}, \ t \in \mathbb{R}$	⊠ gilt mit t = 2	☐ kann nicht gelten
$\vec{b} = \mathbf{t} \cdot \vec{a}, \ \mathbf{t} \in \mathbb{R}$	☐ gilt mit t =	
$P = Q + t \cdot \vec{a}, \ t \in \mathbb{R}$	⊠ gilt mit t = -3	☐ kann nicht gelten

Die Aufgabe ist richtig gelöst, wenn alle Kreuze richtig gesetzt und die Werte beider Parameter richtig angegeben werden.

I. 6 Normale Gerade

Lösung: h: $x_1 + 2x_2 = 3$

Die Aufgabe gilt auch als richtig gelöst, wenn eine äquivalente Gleichung oder eine korrekte Parameterdarstellung, etwa $X={3\choose 0}+t{2\choose -1}$, angegeben wird.

I. 7 Normale Vektoren

Lösung: $b_2 = 9$

 $[da \ 2\cdot 3 + (-1)\cdot b_2 + 3\cdot 1 = 0 \text{ sein muss}]$

Für eine richtige Bewertung ist nur die Angabe des richtigen Werts (keine Rechnung) erforderlich.

I. 8 Parallele Gerade

 $\text{\it L\"osung:} \quad \text{h: } X = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{oder h: } X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Lösung ist auch mit anderen Bezeichnungen für den Parameter sowie für Vielfache des Richtungsvektors als richtig zu werten.

2

I. 9 Schilift

Lösung: Höhendifferenz zwischen Berg- und Talstation des Lifts.

Jede andere, mathematisch wie auch im Kontext korrekte Formulierung (aus der erkennbar ist, dass die Höhendifferenz gemeint ist), ist als richtig zu bewerten.

I. 10 Zugfahrplan

Lösung: (i) Um 09:00 Uhr ist der Zug gemäß Fahrplan 44 km von Leoben entfernt.

(ii) Geringste (durchschnittliche) Geschwindigkeit zwischen Knittelfeld und Judenburg; die Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt hier ca. 60 km/h.

Die Aufgabe ist nur dann als richtig zu bewerten, wenn beide Teile richtig beantwortet wurden.

Die Aufgabe ist auch bei Kurzantworten (zB (i) 44 km; (ii) Knittelfeld-Judenburg: 60 km/h) als richtig zu bewerten.

Die Aufgabe ist auch als richtig zu werten, wenn in (ii) die erste Frage nicht explizit beantwortet wurde, aus der folgenden Rechnung/Antwort jedoch hervorgeht, dass der gesuchte Streckenabschnitt erkannt wurde.

Rechenfehler in (ii) bei der Umrechnung von min in h sind zu tolerieren.

Eine Ungenauigkeit von ±2 km bzw. ±2 min beim Ablesen aus der Grafik ist zu tolerieren.

I. 11 Wassertiefe

Lösung: $y = 140 - 20 \cdot t$

Äquivalente Gleichungen sind als richtig zu bewerten.

I. 12 Taxitarife

Lösung: d: Grundgebühr

k: Gebühr pro gefahrenem Kilometer

Es müssen nicht die hier angegebenen Bezeichnungen verwendet werden: Jede Formulierung, aus der erkennbar ist, dass sachlich das Richtige gemeint ist, ist als richtige Lösung zu bewerten.

I. 13 Radioaktiver Zerfall

Lösung: Die Halbwertszeit von Jod 131 beträgt ca. 8,3 Tage.

Auch die Angabe "ca. 8 Tage" ist als richtig zu werten.

I. 14 Parameter der Sinusfunktion

Lösung: a < c \square b < d \boxtimes a = c \square b = d \square a > c \boxtimes b > d \square

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn alle Kreuze richtig gesetzt wurden.

I. 15 Eigenschaften von Funktionen

Lösung:

	$f_1(x) = x^2 + 3$	$f_2(x) = 5 - 2 \cdot x$
hat für alle $x > 0$ positive Funktionswerte	×	
ist für alle $x < 0$ monoton fallend	×	×
hat ein lokales Minimum	×	

Die Aufgabe gilt als richtig gelöst, wenn alle Kreuze richtig gesetzt wurden.

I. 16 Erste und zweite Ableitung

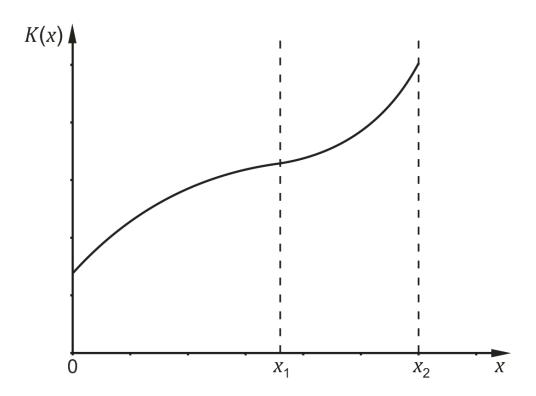
Lösung:

	trifft zu	trifft nicht zu
f'(7) > 0		
f ''(4) = 0	×	
f ''(2) < 0		×
Im Intervall [1; 4] sind alle Werte von f ' positiv.		×
Im Intervall [5; 6,5] sind alle Werte von f " negativ.	×	

Die Aufgabe ist als richtig gelöst zu bewerten, wenn in mindestens vier (der fünf) Zeilen richtig angekreuzt wurde.

I. 17 Nichtlineare Kostenfunktion

Lösung:



Auch (etwas) andere Kurvenverläufe, die die angegebenen Bedingungen erfüllen, sind als richtig zu werten.

I. 18 Freier Fall

Lösung: $A = \int_0^{15} v_2(t) \cdot dt - \int_0^{15} v_1(t) \cdot dt$ oder $A = \int_0^{15} (v_2(t) - v_1(t)) \cdot dt$

Der Wert von A entspricht der Differenz der von den beiden Körpern in den ersten 15 Sekunden zurückgelegten Fallhöhe.

In der Sache korrekte andere Formulierungen (zB mit zurückgelegtem Weg o. Ä.) sind als richtig zu werten.

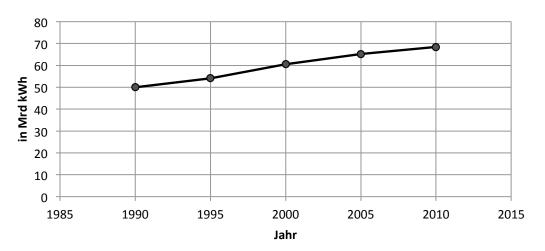
Formale Fehler beim Integral (zB Fehlen von dt, (t) oder Klammer) sind zu tolerieren, wenn erkennbar ist, dass sachlich richtig überlegt wurde.

Die Aufgabe gilt nur dann als richtig gelöst, wenn beide Teile richtig beantwortet wurden.

I. 19 Stromverbrauch in Österreich

Lösung:

Stromverbrauch in Österreich



In der Grafik muss ein deutlich flacherer Verlauf erkennbar sein: Die Skalierung auf der waagrechten Achse muss gestreckt und/oder die Skalierung auf der senkrechten Achse gestaucht werden.

Eine Skalierung der senkrechten Achse, die nicht bei 0 beginnt, ist zu tolerieren.

Eine mangelhafte Beschriftung der Grafik und/oder der Skalen ist zu tolerieren.

I. 20 Körpergrößen

Lösung:

	zutreffend	nicht zutreffend
Ungefähr die Hälfte aller Lehrlinge ist mindestens 177 cm groß.	×	
Ca. 75% aller Lehrlinge sind 168 cm groß oder größer.		
Die durchschnittliche Körpergröße der 180 Lehrlinge beträgt $\frac{153+194}{2}$ = 173,5 cm.		
Es gibt deutlich mehr Lehrlinge mit einer Körper- größe zwischen 168 cm und 177 cm als mit einer Körpergröße zwischen 177 cm und 181 cm.		×
Ungefähr 90 Lehrlinge haben eine Körpergröße zwischen 168 cm und 181 cm.	×	

Die Aufgabe ist als richtig gelöst zu bewerten, wenn in mindestens vier (der fünf) Zeilen richtig angekreuzt wurde.

I. 21 Betriebsjubiläum

Lösung: (i) P (nicht verheiratet) ≈ 0.419

(ii) P (nicht verheiratet | Frau) \approx 0,558

Auch Antworten in Bruch- oder Prozentdarstellung (auch ganzzahlig gerundet) sowie Werte mit zwei oder mehr als drei Dezimalstellen sind als richtig zu bewerten. Rundungsfehler sind zu tolerieren.

I. 22 Multiple-Choice-Test

Lösung: Die Wahrscheinlichkeit, diesen Test allein durch zufälliges Ankreuzen zu bestehen, beträgt ca. 0,03.

Angaben zwischen 0,025 und 0,035 sind als richtig zu bewerten, ebenso Angaben in Prozent.

I. 23 Studierende an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt

Lösung:

	trifft zu	trifft nicht zu
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% werden in der Stichprobe zwischen 78 und 102 weibliche Studierende sein.	⊠	
Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% gab es im Wintersemester 2011/12 an der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt zwischen 52% und 68% weibliche Studierende.		X
An der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt gab es im Wintersemester 2011/12 ca. 6000 weibliche Studierende.	×	
Ein 90%-Schätzbereich für die relative Häufigkeit weiblicher Studierender würde bei gleichem Stichprobenumfang (n = 150) eine kleinere Intervallbreite haben.	⊠	
Würde man 300 Studierende befragen, so wäre die Intervallbreite des 95%-Schätzbereichs für die relative Häufigkeit weiblicher Studierender größer.		×

Die Aufgabe ist als richtig gelöst zu bewerten, wenn in mindestens vier (der fünf) Zeilen richtig angekreuzt wurde.

I. 24 Sonntagsfrage

Lösung: 95%-Konfidenzintervall für den Stimmenanteil des Kandidaten A: [41,3%; 52,7%]

Bei den Intervallgrenzen sind auch ganzzahlige Prozentwerte als richtig zu bewerten, ebenso Schreibweisen wie [0,413; 0,527]. Rundungsfehler und offensichtliche Rechenfehler (bei richtiger und verständig verwendeter Formel für das Konfidenzintervall) sind zu tolerieren.

Aufgaben vom Typ II

Allgemeine Hinweise

Bei den Aufgaben vom Typ II geht es um die selbständige Anwendung von Grundkompetenzen in weniger vertrauten Situationen. Dazu ist in der Regel eine problemadäquate und lösungsrelevante Vernetzung mehrerer Grundkompetenzen erforderlich.

Aus der Art derartiger Aufgabenstellungen ergibt sich, dass oft mehrere Lösungswege möglich sind und innerhalb einer gewissen Bandbreite unterschiedliche Lösungsformulierungen bzw. Darstellungen als richtig zu bewerten sind.

Es ist nicht möglich, alle denkbaren Lösungswege und Antwortformulierungen im Voraus zu erfassen und dafür Beurteilungsrichtlinien anzugeben. Man wird sich vielmehr auf die Angabe von möglichen Lösungen und allenfalls allgemeine Hinweise zur Beurteilung beschränken und die jeweilige Beurteilung der dafür zuständigen Lehrperson bzw. Prüfungskommission überlassen müssen.

Generell sollten bei diesen doch (auch) etwas komplexeren Aufgaben Flüchtigkeitsfehler, Rechenfehler, formale Ungenauigkeiten etc. weitgehend toleriert werden, soweit aus der vorliegenden Aufgabenbearbeitung mathematisch wie im jeweiligen Kontext verständige, weitgehend richtige und lösungsrelevante Überlegungen zweifelfrei erkennbar sind. Allerdings sollten nicht für jeden Teilansatz Punkte vergeben werden, sondern nur für größere, lösungsrelevante gedankliche Einheiten.

II. 1 Polynomfunktionen [8 Punkte]

Lösung:

a) Polynomfunktion n-ten Grades [3 Punkte]

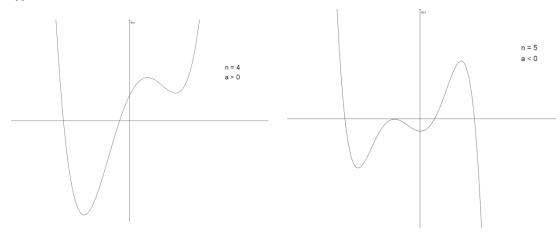
Gleichung: $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i \text{ mit } a_i \in \mathbb{R}, \ a_n \neq 0$

bzw. $f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_0$

mit $n \in \mathbb{N}$, a_0 , a_1 , ..., $a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

Nullstellen: höchstens n Extremstellen: höchstens n-1 Wendestellen: höchstens n-2

typische Verläufe zB:



Punktevergabe:

- 1 Punkt für (weitgehend) vollständige und korrekte Charakterisierung (Gleichung, Nullstellen, ...).
- 1 Punkt für zwei unterschiedliche, typische Graphen (n Nullstellen und/oder n-1 Extremstellen und/oder n-2 Wendestellen).
- 1 Punkt für übersichtliche Darstellung, formale Korrektheit, Vollständigkeit, Kennzeichnung (a, n) der Grafiken.

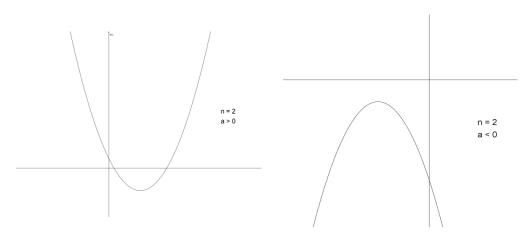
b) Polynomfunktion 2. Grades [3 Punkte]

Gleichung: $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \ne 0$

Nullstellen: höchstens zwei

Extremstellen: eine [auch: höchstens eine]

Wendestellen: keine typische Verläufe zB:

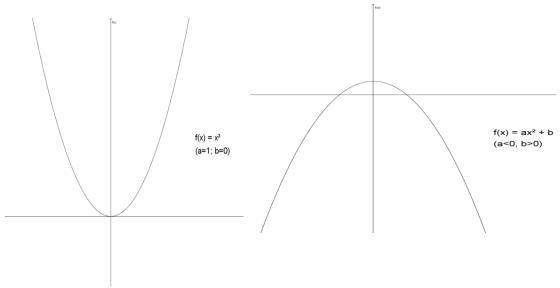


Fall
$$f(x) = a \cdot x^2 + b$$
 mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Parameter: b ... Graph schneidet 2. Koordinatenachse im Punkt (0, b)

a ... je kleiner |a|, desto flacher verläuft der Graph

typische Verläufe zB:



Punktevergabe: 1 Punkt für (weitgehend) vollständige und korrekte Charakterisierung (Gleichung, Nullstellen, bzw. Parameter a, b).

1 Punkt für vier geeignete, aussagekräftige/typische Graphen.

1 Punkt für übersichtliche Darstellung, formale Korrektheit, Vollständigkeit, Kennzeichnung (a, n bzw. a, b) der Grafiken.

c) Polynomfunktion 3. Grades [2 Punkte]

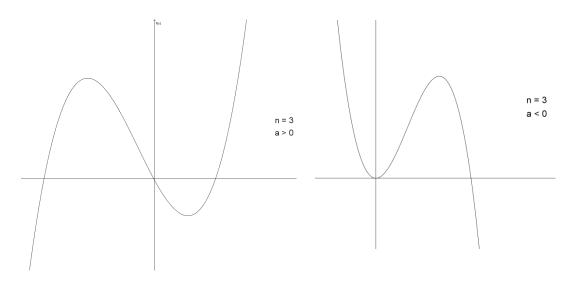
Gleichung: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Nullstellen: höchstens drei

Extremstellen: keine oder zwei [auch: höchstens zwei]

Wendestellen: eine [auch: höchstens eine]

typische Verläufe zB:



Punktevergabe: 1 Punkt für (weitgehend) vollständige und korrekte Charak-

terisierung (Gleichung, Nullstellen,).

1 Punkt für zwei geeignete, aussagekräftige/typische Graphen.

II. 2 Elastizität der Nachfrage [8 Punkte]

Lösung:

a) Elastische Nachfrage:
$$\bar{E}(4; 5) = \frac{\frac{1500 - 3000}{3000}}{\frac{5 - 4}{4}} = \frac{-0.5}{0.25} = -2$$

Eine relative Preiserhöhung (um p%) bewirkt einen doppelt so großen Rückgang der nachgefragten Menge (um 2p%).

Unelastische Nachfrage:
$$\bar{E}(3; 4,5) = \frac{\frac{3000-4000}{4000}}{\frac{4,5-3}{3}} = \frac{-0,25}{0,5} = -0,5$$

Eine relative Preiserhöhung (um p%) bewirkt einen halb so großen relativen Rückgang der nachgefragten Menge (um 0,5p%).

Punktevergabe: 1 Punkt für korrekte Berechnungen.

1 Punkt für angemessene Interpretationen der Rechenergebnisse.

b) Elastisch:
$$\bar{E}(p_1,p_2) < -1$$
 oder $|\bar{E}(p_1,p_2)| > 1$ Unelastisch: $-1 < \bar{E}(p_1,p_2) < 0$ oder $|\bar{E}(p_1,p_2)| < 1$

Punktevergabe: je 1 Punkt für korrekte Angaben für elastisch bzw. unelastisch.

c) Die Elastizitätsgrenze liegt bei -1.

$$E(p) = p \cdot \frac{m'(p)}{m(p)} = p \cdot \frac{2p - 60}{p^2 - 60p + 900} = \frac{2p^2 - 60p}{p^2 - 60p + 900}$$

$$E(p) = -1 \Rightarrow \frac{2p^2 - 60p}{p^2 - 60p + 900} = -1 \xrightarrow{p \neq 30} 2p^2 - 60p = -(p^2 - 60p + 900) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3p^2 - 120p + 900 = 0$$
$$\Rightarrow (p = 30) \lor p = 10$$

Für p = 9 erhält man $E(p) \approx$ -0,86, für p = 11 erhält man $E(p) \approx$ -1,16.

Die Nachfrage ist somit unelastisch für p<10, elastisch für p>10.

Hinweis: Die Entscheidung, in welchem Bereich die Nachfrage elastisch und in welchem Bereich sie unelastisch ist, kann auch durch Lösung der entsprechenden quadratischen Ungleichung oder aufgrund von Überlegungen im Kontext erfolgen.

Punktevergabe: 2 Punkte für eine vollständig korrekte Ermittlung der Elastizitätsgrenze.

Kleinere Mängel bei der Berechnung (zB Nichtbeachtung von p ≠ 30, Rechenfehler) können durch korrekte Identifizierung der Elastizitätsbereiche kompensiert werden.

d) Isoelastisch bedeutet, dass für jeden Preis (innerhalb der Definitionsmenge) eine Preiserhöhung um p% einen Rückgang der nachgefragten Menge um ebenfalls p% zur Folge hat.

Die Nachfragefunktion m mit $m(p) = \frac{1}{p}$ ist isoelastisch, es gilt:

$$E(p) = p \cdot \frac{m'(p)}{m(p)} = p \cdot \frac{\frac{-1}{p^2}}{\frac{1}{p}} = \frac{-p^2}{p^2} = -1$$

Punktevergabe: 1 Punkt für eine angemessene inhaltliche Beschreibung der Isoelastizität.

1 Punkt für einen korrekten rechnerischen Nachweis.

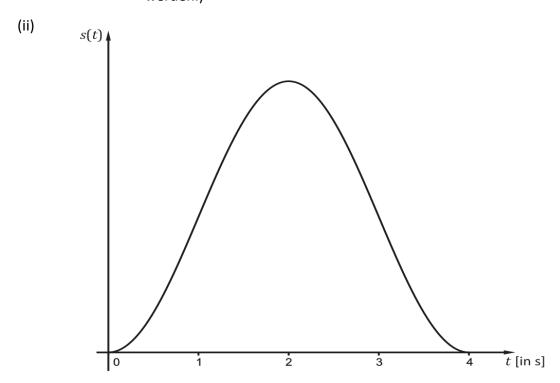
II. 3 Federpendel [8 Punkte]

Lösung:

a) (i) Der Pendelkörper bewegt sich beschleunigt nach oben und erreicht nach t = 1 Sekunde die maximale Geschwindigkeit (Beschleunigung gleich null). Im Intervall [1; 2] bewegt sich das Pendel weiter nach oben, die Geschwindigkeit nimmt ab (negative Beschleunigung). Zum Zeitpunkt t = 2 erreicht das Pendel den höchsten Punkt, seine Geschwindigkeit ist gleich null. Im Intervall [2; 3] bewegt sich das Pendel beschleunigt nach unten, erreicht zum Zeitpunkt t = 3 seine größte Abwärtsgeschwindigkeit (Durchgang durch die Gleichgewichtslage), wird im Intervall [3; 4] wieder langsamer und erreicht zum Zeitpunkt t = 4 wieder seinen tiefsten Punkt (=Ausgangslage).

Punktevergabe:

2 *Punkte* für eine weitgehend vollständige inhaltliche Beschreibung, in der auf die Lage des Pendelkörpers, auf Geschwindigkeit und Beschleunigung eingegangen wird. (Für größere Lücken/Defizite in der Beschreibung ist 1 Punkt abzuziehen, bei größeren Fehlinterpretationen oder weitreichenden Lücken dürfen keine Punkte vergeben werden.)



Punktevergabe: 1 Punkt für einen passenden/möglichen Graphen. Eine fehlende Achsenbeschriftung ist zu tolerieren.

b) $\int_{0}^{2} v(t)dt$

Punktevergabe: 2 Punkte für die korrekte Antwort.

Bei fehlenden oder falschen Grenzen ist 1 Punkt abzuziehen, ein fehlendes "dt" ist zu tolerieren.

c) Abstand zwischen der Ausgangslage (t = 0) des Pendelkörpers und der Lage des Pendelkörpers zum Zeitpunkt t_1 .

Punktevergabe: 2 Punkte für eine zweifelsfrei korrekte Antwort.

Bei ungenauen/unkorrekten Formulierungen ist nur dann ein Punkt zu geben, wenn aus der Antwort zweifelsfrei erkennbar ist, dass die wesentlichen Überlegungen grundsätzlich richtig sind.

d) Durchschnittliche Geschwindigkeit des Pendelkörpers in den ersten zwei Zeiteinheiten (von der Ausgangslage im Zeitpunkt t=0 bis zum Erreichen des höchsten Punkts nach 2 Zeiteinheiten).

Punktevergabe: 1 Punkt nur bei vollständig korrekter Antwort. Diese muss auf die durchschnittliche Geschwindigkeit fokussieren. (Antworten,

die den Term als Weg oder Ort interpretieren, sind nicht als

richtig zu bewerten.)

II. 4 Lebenserwartung

Lösung:

a)
$$l(x + 1) = l(x) \cdot (1 - q(x))$$

Hinweis: Jede dazu äquivalente Gleichung ist als richtig zu werten.

Punktevergabe: 1 Punkt für korrekte Gleichung.

b) (i)
$$\frac{l(20)}{l(0)} = \frac{99405}{100000} \approx 99,41\%$$
 (ii) $\frac{l(20)}{l(10)} = \frac{99405}{99536} \approx 99,87\%$

Punktevergabe: je 1 Punkt für korrekten Wert in (i) bzw. (ii).

Eine richtige Antwort in Bruchdarstellung ist als richtig zu werten.

c)
$$p_{21} = \frac{l(20) - l(21)}{l(0)} \left[= \frac{d(20)}{l(0)} \right] = 30/100\ 000 = 0.03\%$$

$$p_x = \frac{l(x-1)-l(x)}{l(0)} \left[= \frac{d(x-1)}{l(0)} \right]$$

Punktevergabe: 1 Punkt für korrekten Wert p_{21} .
1 Punkt für korrekte Formel.

d) (i)
$$E(X) = \sum_{x=1}^{95} (x - 0.5) \cdot \frac{d(x-1)}{l(0)}$$
 bzw.

$$E(X) = \sum_{x=1}^{95} (x - 0.5) \cdot \frac{l(x-1) - l(x)}{l(0)}$$

Punktevergabe: 2 Punkte für korrekte Formel in einer der beiden Formen.

Für unkorrekte Indizierung, Laufvariable bei x=0 beginnend und/oder x statt (x=0,5) ist ein Punkt abzuziehen.

(ii)
$$E(X) = 0.5 \cdot \frac{434}{100000} + 1.5 \cdot \frac{35}{100000} + 2.5 \cdot \frac{20}{100000}$$

Punktevergabe: 1 Punkt für eine korrekte Darstellung.