Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik“

Grundkompetenzen konkret:

Exemplarische Aufgaben und Aufgabenstellungen

Zusammengestellt von W. Peschek

Institut für Didaktik der Mathematik
Alpen-Adria-Universität Klagenfurt
März 2012

Vorbemerkung

Die im Folgenden exemplarisch angeführten Aufgaben bzw. Aufgabenstellungen beziehen sich in der Regel nicht auf alle der unter der jeweiligen Nummer angeführten Grundkompetenzen. Für eine umfassende Maturavorbereitung wird man sich nicht auf die angegebenen Aufgaben beschränken, sondern alle angeführten Grundkompetenzen in allen Teilaspekten und Ausprägungen in den Blick nehmen und reflektieren müssen.

Inhaltsbereich Algebra und Geometrie

Grundbegriffe der Algebra

AG1 Wissen über die Zahlenmengen $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ verständig einsetzen können

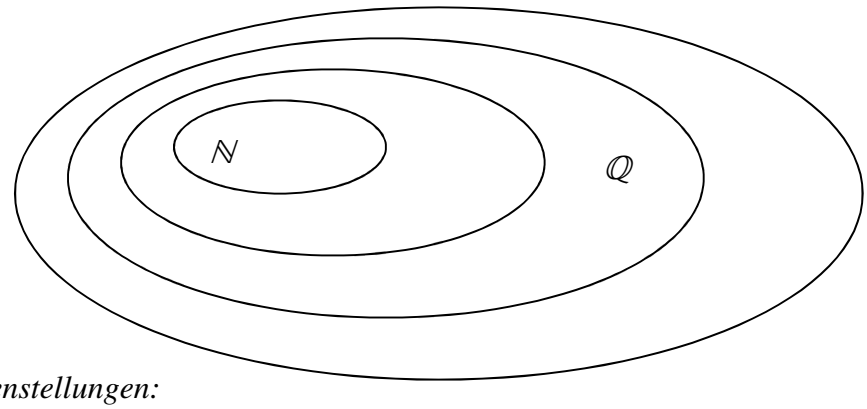
AG2 Wissen über algebraische Begriffe angemessen einsetzen können: Variable, Terme, Formeln, (Un-)Gleichungen, Gleichungssysteme; Äquivalenz, Umformungen, Lösbarkeit

Anmerkung: Bei den Zahlenmengen soll man die Mengenbezeichnungen und die Teilmengenbeziehungen kennen, Elemente angeben sowie zuordnen können und die reellen Zahlen als Grundlage kontinuierlicher Modelle kennen. Zum Wissen über die reellen Zahlen gehört auch, dass es Zahlenbereiche gibt, die über $\mathbb{R}$ hinausgehen.
Die algebraischen Begriffe soll man anhand von einfachen Beispielen beschreiben/ erklären und verständig verwenden können.

Ad AG1:

Zahlbereiche

Die folgende Grafik veranschaulicht die Teilmengenbeziehungen von Zahlbereichen!



Aufgabenstellungen:

i) Tragen Sie die fehlenden Zahlbereichsbezeichnungen an den richtigen Stellen ein!

ii) Platzieren Sie die folgenden Zahlen richtig in der Grafik:

$\frac{6}{2}$ $\frac{\pi}{2}$ 6,06 $0,\dot{6}$ -6 $+6$ $\sqrt{6}$ 606

Zahlen

In der folgenden Tabelle sind verschiedene Zahlen angegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie in jeder Zeile *alle* zutreffenden Aussagen an!

		$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
0,03	$\in$	❑	❑	❑	❑
-6	$\in$	❑	❑	❑	❑
$\frac{\pi}{2}$	$\in$	❑	❑	❑	❑
$3 \cdot 10^{-2}$	$\in$	❑	❑	❑	❑
$-\frac{1}{3}$	$\in$	❑	❑	❑	❑

Ad AG2:

Typische Fragestellungen könnten sein:

- Was versteht man unter einem Term?
- Was versteht man unter einer Gleichung, was versteht man unter einer Formel?
- Wann sind zwei Gleichungen äquivalent?
- Was versteht man unter einem linearen Gleichungssystem mit zwei Variablen?

Vor allem aber wird es hier darauf ankommen, die angeführten Begriffe in entsprechenden Zusammenhängen/Aufgabenstellungen verständig zu erfassen und zu interpretieren.

(Un-)Gleichungen und Gleichungssysteme

AG3 Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

AG4 Lineare Gleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen und die Lösung im Kontext deuten können

AG5 Quadratische Gleichungen in einer Variablen umformen/lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

AG6 Lineare Ungleichungen aufstellen, interpretieren, umformen/lösen, Lösungen (auch geometrisch) deuten können

AG7 Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen aufstellen, interpretieren, umformen/ lösen, über Lösungsfälle Bescheid wissen, Lösungen und Lösungsfälle (auch geometrisch) deuten können

Anmerkung: Einfache Terme können auch Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Sinus etc. beinhalten. Umformungen von Termen, Gleichungen (Formeln), Ungleichungen und Gleichungssystemen beschränken sich auf Fälle geringer Komplexität.

Ad AG3:

Umformen

Die Anzahl N bestimmter Bakterien entwickelt sich im Laufe der Zeit t gemäß der Formel:

$$N = \frac{G}{1 + a \cdot b^t}$$

Aufgabenstellung:

Drücken Sie die Variable t aus der gegebenen Gleichung aus!

$t =$

Ad AG4:

Männer und Frauen I

Es sei M die Anzahl der Männer und F die Anzahl der Frauen in einem bestimmten Raum.

Aufgabenstellungen:

i) Schreiben Sie den folgenden Sachverhalt als Gleichung in M und F:
Es sind 11 Männer mehr im Raum als Frauen.

ii) Beschreiben Sie den folgenden Sachverhalt in Worten:
$M = 2 \cdot F$

Ad AG5:

Lösungsfälle einer quadratischen Gleichung

Gegeben ist eine quadratische Gleichung: $a \cdot x^2 + 4 \cdot x + 1 = 0 \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$

Aufgabenstellung:

Geben Sie alle Werte von a an, für die die quadratische Gleichung zwei reelle Lösungen, genau eine reelle Lösung, keine reelle Lösung hat!

Ad AG6:

Ungleichung

Gegeben ist die Ungleichung $x - 1 < 2x + 2$.

Aufgabenstellung:

Lösen Sie die Ungleichung und stellen Sie die Lösungsmenge auf einer Zahlengeraden dar!

Ad AG7:

Gleichungssystem mit Parameter

Gegeben ist das folgende Gleichungssystem in x und y:

$I: \quad 9x + 6y = 1$

$II: \quad 6x + 4y = a$

Aufgabenstellungen:

Geben Sie alle Werte $a \in \mathbb{R}$ an, für die das Gleichungssystem

(i) keine Lösung (ii) genau eine Lösung (iii) unendlich viele Lösungen

hat!

Vektoren

AG8 Vektoren als Zahlentupel verständig einsetzen und im Kontext deuten können

AG9 Vektoren geometrisch (als Punkte bzw. Pfeile) deuten und verständig einsetzen können

AG10 Definitionen der Rechenoperationen mit Vektoren (Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarmultiplikation) kennen, Rechenoperationen verständig einsetzen und (auch geometrisch) deuten können

AG11 Geraden durch (Parameter-)Gleichungen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ angeben können; Geradengleichungen interpretieren können; Lagebeziehungen (zwischen Geraden und zwischen Punkt und Gerade) analysieren, Schnittpunkte ermitteln können

AG12 Normalvektoren in $\mathbb{R}^2$ aufstellen, verständig einsetzen und interpretieren können

Anmerkung: Vektoren sind als Zahlentupel, also als algebraische Objekte, zu verstehen und in entsprechenden Kontexten verständig einzusetzen. Punkte und Pfeile in der Ebene und im Raum müssen als geometrische Veranschaulichungen dieser algebraischen Objekte interpretiert werden können.
Die geometrische Deutung der Skalarmultiplikation (in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) meint hier nur den Spezialfall $a \cdot b = 0$.
Geraden sollen in Parameterform, in $\mathbb{R}^2$ auch in parameterfreier Form, angegeben und interpretiert werden können.

Ad AG8 und AG10:

Verkauf

In einem kleinen Laden werden 12 Produkte zum Verkauf angeboten.
Die Verkaufspreise aller 12 Produkte werden in einem „Preisvektor“ *P* übersichtlich zusammengefasst, ein „Lagerbestandsvektor“ *L* fasst die Anzahlen der vor der Ladenöffnung je Produkt vorhandenen Warenzahlen übersichtlich zusammen, ein „Verkaufsvektor“ *V* zeigt je Produkt die Anzahl der an diesem Tag verkauften Stücke:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_{12} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \dots \\ l_{12} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_{12} \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellungen:

Stellen Sie in Form von Vektorformeln

i) den Lagerbestand *S* bei Geschäftsschluss
ii) den Umsatz *U* des Geschäftstages

dar! (*Hinweis: Umsatz = Summe aller Verkaufserlöse)*

Elektroboot

Auf einem Radar kann ein Elektroboot an der Position A(2/0) identifiziert werden. Es fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf direktem Kurs in Richtung des Punktes Z(2/36), den es 12 Minuten später erreicht.

Aufgabenstellung:

Geben Sie die Koordinaten jenes Vektors an, der den vom Boot innerhalb einer Minute zurückgelegten Weg beschreibt!

Ad AG10:

Summe von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

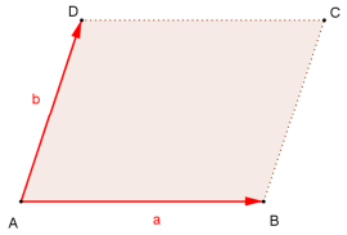
Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die *y*-Koordinate des Vektors $\vec{b}$ so, dass die Summe der beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{c}$ hat!

Ad AG9:

Parallelogramm

Gegeben ist ein Parallelogramm, seine vier Eckpunkte sowie zwei Vektoren *a* und *b*, dargestellt als Pfeile:



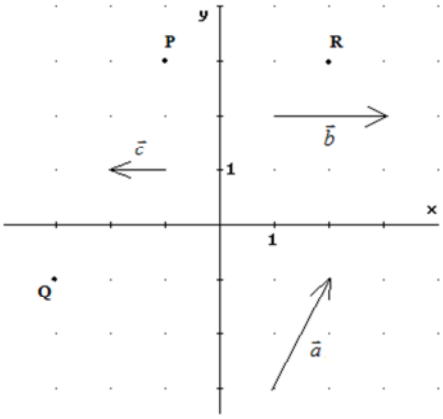
Aufgabenstellungen:

Zeichnen Sie:

i) vom Punkt C aus einen Pfeil, der den Vektor *a* darstellt
ii) vom Punkt A aus einen Pfeil, der den Vektor $a + b$ darstellt
iii) vom Punkt B aus einen Pfeil, der den Vektor $\frac{1}{2} \cdot a$ darstellt
iv) vom Punkt D aus einen Pfeil, der den Vektor $a - b$ darstellt

Vektoren geometrisch

Gegeben seien die Punkte P, Q und R sowie die Pfeile $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ wie in der folgenden Zeichnung dargestellt.



Aufgabenstellungen:

Kreuzen Sie in jeder Zeile an, ob die in der linken Spalte angegebene Gleichung gelten kann! Falls ja, geben Sie auch den entsprechenden Parameterwert an!

	gilt mit	kann nicht gelten
$\vec{a} = t \cdot \vec{b}$, $t \in \mathbb{R}$	t = ……	
$\vec{b} = t \cdot \vec{c}$, $t \in \mathbb{R}$	t = ……	
$Q = P + t \cdot \vec{c}$, $t \in \mathbb{R}$	t = ……	

Ad AG11 und AG12:

Parallele und Normale

Durch den Punkt P(1; 4) verlaufen eine Parallele p sowie eine Normale n zur Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellungen:

(i) Wie lautet eine Gleichung der Parallelen p? **p:** ……..

(ii) Wie lautet eine Gleichung der Normalen n? **n:** ……..

Parallel?

Gegeben sind die Gleichungen von drei Geraden, zwei davon sind parallel:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad h\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad m\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabenstellung:

Welche der gegebenen Geraden sind zueinander parallel? Begründen Sie!

Produkt

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabenstellungen:

(i) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ ……

(ii) Was bedeutet dieses Ergebnis geometrisch?

Trigonometrie

AG13 Definitionen von *sin*, *cos*, *tan* im rechtwinkeligen Dreieck kennen und zur Auflösung rechtwinkeliger Dreiecke einsetzen können

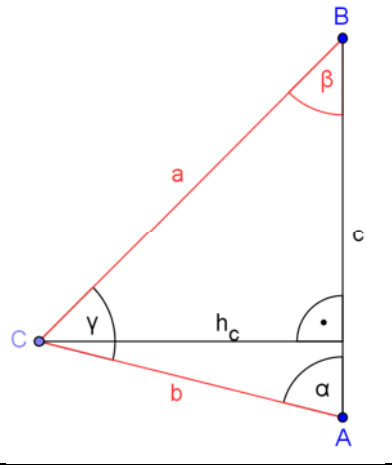
AG14 Definitionen von *sin*, *cos* für Winkel größer als 90° kennen und einsetzen können

Anmerkung: Die Kontexte beschränken sich auf einfache Fälle in der Ebene und im Raum, komplexe (Vermessungs-)Aufgaben sind hier nicht gemeint; Sinus- und Cosinussatz werden dabei nicht benötigt.

Ad AG13:

Höhe eines Dreiecks

Von einem allgemeinen Dreieck sind a, b und β bekannt (Bezeichnungen siehe Grafik).



Aufgabenstellung:

Geben Sie eine Formel an, mit der aus den gegebenen Bestimmungsstücken die Höhe h_c berechnet werden kann!

Steigung einer Straße

Die Steigung (bzw. das Gefälle) von Straßen wird auf Verkehrsschildern in Prozent angegeben. Eine Angabe von 12 % Steigung bedeutet beispielsweise, dass auf einer waagrechten Strecke von 100 Metern die Höhe um 12 Meter zunimmt. Jeder Steigung von p (in %) entspricht ein bestimmter Steigungswinkel α.

Aufgabenstellungen:

a) Drücken Sie den Zusammenhang zwischen α und p in einer Formel aus!

b) Wie groß ist der Steigungswinkel bei einer Steigung von 100 %?

c) Wie groß ist die Steigung (in Prozent) bei einem Steigungswinkel $\alpha = 12^0$?

Ad AG14:

Winkelbeispiele

In der folgenden Tabelle sind Bedingungen für den Sinus und den Kosinus eines Winkels angegeben.

Aufgabenstellung:

Geben Sie in jeder Zeile einen konkreten Winkel an, für den beide angegebenen Bedingungen erfüllt sind!

Bedingungen		Winkelbeispiel
sin (α) > 0	cos (α) > 0	α =
sin (α) = 0	cos (α) < 0	α =
sin (α) = 0,5	cos (α) > 0	α =
sin (α) > 0,5	cos (α) < 0	α =

Inhaltsbereich Funktionale Abhängigkeiten

Funktionsbegriff, reelle Funktionen, Darstellungsformen und Eigenschaften

F1 Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

F2 Formeln als Darstellungen von Funktionen interpretieren und den Funktionstypen zuordnen können

F3 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge wechseln können

F4 Aus Tabellen, Graphen[1] und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

F5 Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel (lokale Extrema), Wendepunkte, Periodizität, Achsensymmetrie, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen

F6 Schnittpunkte zweier Funktionsgraphen grafisch und rechnerisch ermitteln und im Kontext interpretieren können

F7 Funktionen als mathematische Modelle verstehen und damit verständig arbeiten können

F8 Durch Gleichungen (Formeln) gegebene Funktionen mit mehreren Veränderlichen im Kontext deuten, Funktionswerte ermitteln können

F9 Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

Anmerkung: Auf eine sichere Unterscheidung zwischen funktionalen und nicht-funktionalen Zusammenhängen wird Wert gelegt, auf theoretisch bedeutsame Eigenschaften (z. B. Injektivität, Surjektivität, Umkehrbarkeit) wird aber nicht fokussiert. Im Vordergrund stehen die Rolle von Funktionen als Modelle und die verständige Nutzung grundlegender Funktionstypen und deren Eigenschaften sowie der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen (auch $f\colon A \to B,\ x \mapsto f(x)$).
Die Bearbeitung von Funktionen mit mehreren Veränderlichen beschränkt sich auf die Interpretation der Funktionsgleichung im jeweiligen Kontext sowie auf die Ermittlung von Funktionswerten.
Das rechnerische Ermitteln von Schnittpunkten von Funktionen beschränkt sich auf jene Fälle, die durch die im Inhaltsbereich Algebra und Geometrie angeführten Grundkompetenzen abgedeckt sind (lineare, quadratische Gleichungen).
Der Verlauf von Funktionen soll nicht nur mathematisch beschrieben, sondern auch im jeweiligen Kontext gedeutet werden können.

[1] Der Graph einer Funktion ist als Menge der Wertepaare definiert. Einer verbreiteten Sprechweise folgend, nennen wir die grafische Darstellung des Graphen im kartesischen Koordinatensystem jedoch ebenfalls kurz „Graph“.

Ad F1 – F9:

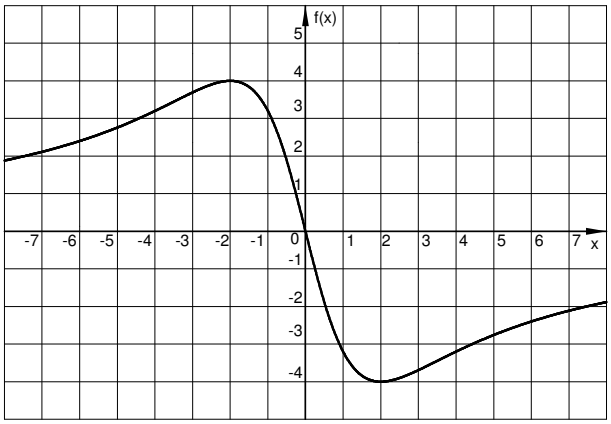
Die Bedeutung der hier angeführten Grundkompetenzen kommt in der Regel erst im Zusammenhang mit konkreten Funktionstypen zum Tragen. Sie werden bei Aufgaben zu den in der Folge angeführten Funktionstypen vielfach implizit benötigt, seltener direkt in eigenen Aufgaben überprüft. Trotzdem sollen hier exemplarisch einige Fragestellungen und Aufgaben angeführt werden, die auf die jeweilige Grundkompetenz verweisen:

- Welche Geraden können nicht als Graphen von (linearen) Funktionen interpretiert werden? Begründung! (F1)
- Die Zinseszinsformel lautet $K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$. Man kann diese Formel auch als Funktionsgleichung der Form $K(n) = K(0) \cdot (1+i)^n$ interpretieren. Um welchen Funktionstyp handelt es sich dabei? (F2)
- Wie kann man aus der Gleichung einer Exponentialfunktion bei gegebenem Funktionswert den zugehörigen Argumentwert ermitteln? (F4)
- Wie kann man rechnerisch den Schnittpunkt des Graphen einer Erlösfunktion und des Graphen einer Kostenfunktion ermitteln? Was bedeuten die Koordinaten des Schnittpunktes in diesem Kontext? (F6)

Ad F5:

Monotonie und Extrema

Gegeben ist der Graph einer Funktion:



Aufgabenstellungen:

Beschreiben Sie das Monotonieverhalten der Funktion f im dargestellten Bereich!
Geben Sie alle lokalen und globalen Extrema im Intervall [–8; 8] an!

Ad F9:

Funktionen-Vergleich

Lineare Funktion und Exponentialfunktion haben Gemeinsamkeiten und Unterschiede.

Aufgabenstellung:

Stellen Sie die beiden Funktionstypen vergleichend gegenüber!

Lineare Funktion [$f(x) = k \cdot x + d$]

F10 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene lineare Zusammenhänge als lineare Funktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

F11 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen linearer Funktionen Werte(paare) sowie die Parameter k und d ermitteln und im Kontext deuten können

F12 Die Wirkung der Parameter k und d kennen und in unterschiedlichen Kontexten deuten können

F13 Charakteristische Eigenschaften kennen und im Kontext deuten können:

$f(x+1) = f(x) + k$; $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = k = [f'(x)]$

F14 Die Angemessenheit von Beschreibungen mittels linearer Funktionen bewerten können

F15 Direkte Proportionalität als lineare Funktion vom Typ $f(x) = k \cdot x$ beschreiben können

Anmerkung: Die Parameter k und d sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Ad F10:

Lineare Funktionen

Von fünf Funktionen f_1, f_2, f_3, f_4 und f_5 kennt man jeweils einige Wertepaare:

x	$f_1(x)$
-2	1
-1	1
0	3
1	5
2	7

x	$f_2(x)$
-2	2
-1	2
0	2
1	2
2	2

x	$f_3(x)$
-2	5
-1	2
0	1
1	2
2	5

x	$f_4(x)$
-2	5
-1	3
0	1
1	-1
2	-3

x	$f_5(x)$
-2	3
-1	3
0	-3
1	3
2	3

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie an, welche dieser Funktionen <u>keine</u> lineare Funktion sein kann?

f_1 ☐ f_2 ☐ f_3 ☐ f_4 ☐ f_5 ☐

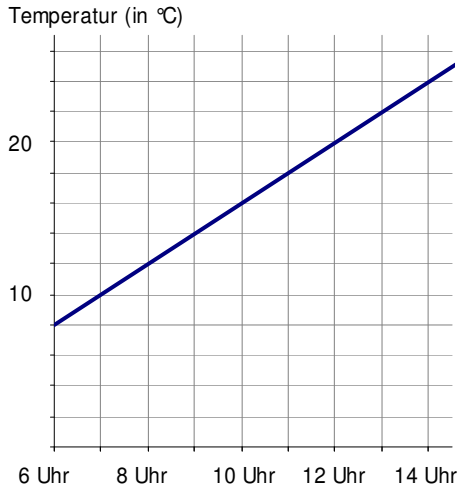
Ad F13:

Hier geht es um die konstitutive Eigenschaft der linearen Funktion: Wenn man den Argumentwert um 1 erhöht, so verändert sich der Funktionswert stets um denselben Wert k. Dieser Wert entspricht auch dem Differenzen- sowie dem Differentialquotienten für jedes Intervall bzw. jede Stelle.

Ad F10, F11:

Lufttemperatur

Die nebenstehende Grafik zeigt näherungsweise die Entwicklung der Lufttemperatur in Lüderitz (Namibia) an einem Septembertag zwischen 6 Uhr und 14 Uhr.



Aufgabenstellung:

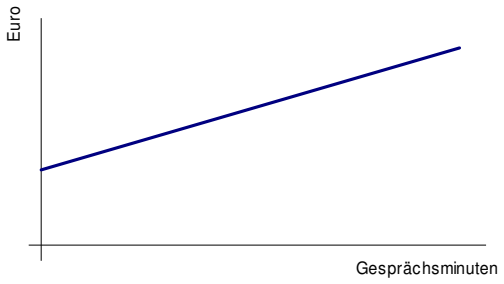
Geben Sie eine Formel an, mit der die Lufttemperatur $L(t)$ in Abhängigkeit von der Anzahl t der seit 6 Uhr vergangenen Stunden berechnet werden kann!

L(t) = …….

Ad F12:

Handytarif

Der monatliche Tarif für ein Handy wurde als lineare Funktion der Form $f(x) = k \cdot x + d$ modelliert (siehe Grafik).



Aufgabenstellung:

Tragen Sie in der folgende Tabelle ein, welche Bedeutung $f(x)$, k und d in diesem Kontext haben!

Bedeutung von x:	Anzahl der Gesprächsminuten (in einem Monat)
Bedeutung von $f(x)$:	
Bedeutung von k:	
Bedeutung von d:	

Potenzfunktion mit $f(x) = a \cdot x^z + b$, $z \in \mathbb{Z}$, oder mit $f(x) = a \cdot x^{1/2} + b$

F16 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

F17 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Potenzfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter *a* und *b* ermitteln und im Kontext deuten können

F18 Die Wirkung der Parameter *a* und *b* kennen und im Kontext deuten können

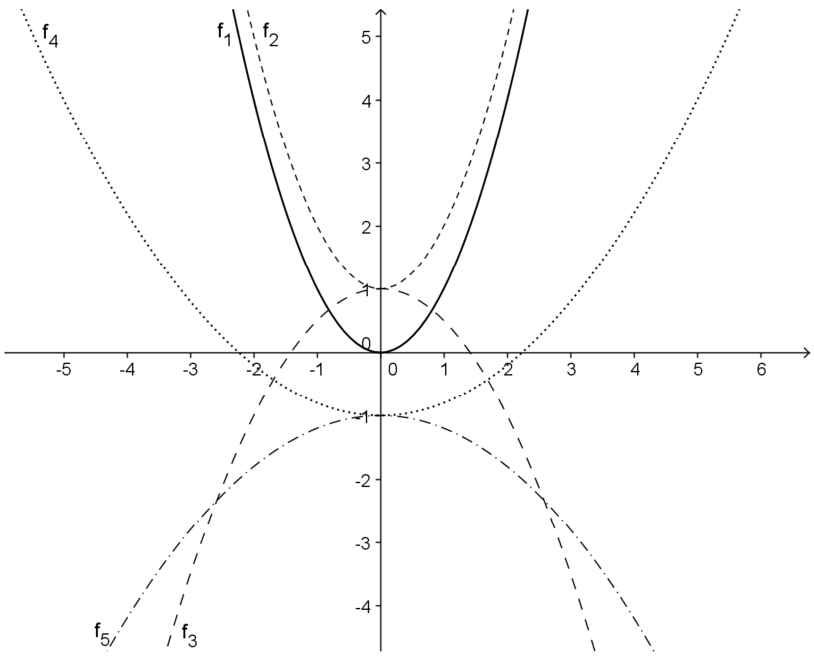
F19 Indirekte Proportionalität als Potenzfunktion vom Typ $f(x) = a / x$ (bzw. $f(x) = a \cdot x^{-1}$) beschreiben können

Anmerkung: Wurzelfunktionen bleiben auf den quadratischen Fall $a \cdot x^{1/2} + b$ beschränkt.

Ad F18:

Quadratische Funktionen

Im folgenden Koordinatensystem sehen Sie fünf Graphen von quadratischen Funktionen. Dabei ist f_1: $x \rightarrow x^2$.



Aufgabenstellung:

Ordnen Sie den unten angeführten Funktionstermen die jeweils zutreffende Funktion zu!

☐ $x \rightarrow \frac{1}{5} \cdot x^2 - 1$ ☐ $x \rightarrow x^2 + 1$ ☐ $x \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$ ☐ $x \rightarrow -\frac{1}{5} \cdot x^2 - 1$

Polynomfunktion [$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i$ mit $n \in \mathbb{N}$]

F20 Typische Verläufe von Graphen in Abhängigkeit vom Grad der Polynomfunktion (er)kennen

F21 Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können

F22 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Polynomfunktionen Funktionswerte, aus Tabellen und Graphen sowie aus einer quadratischen Funktionsgleichung Argumentwerte ermitteln können

F23 Den Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen wissen

Anmerkung: Der Zusammenhang zwischen dem Grad der Polynomfunktion und der Anzahl der Null-, Extrem- und Wendestellen sollte für beliebige n bekannt sein, konkrete Aufgabenstellungen beschränken sich auf Polynomfunktionen mit $n \leq 4$.
Argumentwerte sollen aus Tabellen und Graphen, für Polynomfunktionen bis $n = 2$ und solchen, die sich durch einfaches Herausheben oder einfache Substitution auf quadratische Funktionen zurückführen lassen, auch aus der jeweiligen Funktionsgleichung ermittelt werden können.

Ad F20:

Eine typische Aufgabenstellung wäre hier etwa, einige typische Graphen von Polynomfunktionen 3. Grades zeichnen zu lassen (Fallunterscheidungen für a>0 bzw. a<0 beachten, verschieden viele Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen).

Ad F23:

Nullstellen einer quadratischen Funktion

Gegeben ist die folgende Behauptung:

Jede quadratische Funktion mit $f(x) = a x^2 + b x + c$ hat mindestens eine reelle Nullstelle.

Aufgabenstellung:

Ist diese Behauptung wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

Exponentialfunktion [$f(x) = a \cdot b^x$ bzw. $f(x) = a \cdot e^{\lambda \cdot x}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+, \lambda \in \mathbb{R}$]

F24 Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene exponentielle Zusammenhänge als Exponentialfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

F25 Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Exponentialfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter a und b (bzw. e^{λ}) ermitteln und im Kontext deuten können

F26 Die Wirkung der Parameter a und b (bzw. e^{λ}) kennen und in unterschiedlichen Kontexten deuten können

F27 Charakteristische Eigenschaften ($f(x+1) = b \cdot f(x)$; $[e^x]' = e^x$) kennen und im Kontext deuten können

F28 Die Begriffe „Halbwertszeit“ und „Verdoppelungszeit“ kennen, die entsprechenden Werte berechnen und im Kontext deuten können

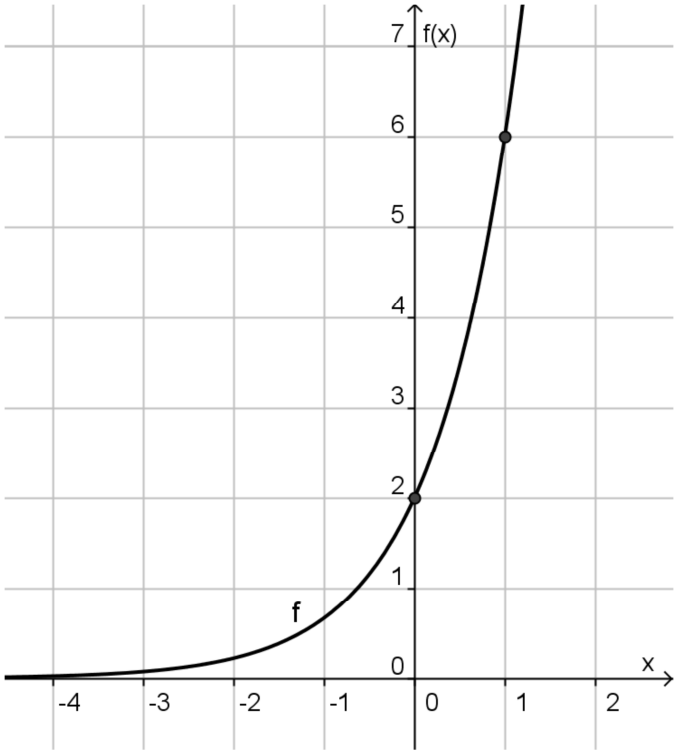
F29 Die Angemessenheit einer Beschreibung mittels Exponentialfunktion bewerten können

Anmerkung: Die Parameter a und b (bzw. e^{λ}) sollen sowohl für konkrete Werte als auch allgemein im jeweiligen Kontext interpretiert werden können. Entsprechendes gilt für die Wirkung der Parameter und deren Änderung.

Ad F25:

Graph einer Exponentialfunktion

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$ (mit $a, b \in \mathbb{R}^+$).



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Werte der Parameter a und b!

$a =$ _____ $b =$ _____

Kapital

Ein Kapital wächst nach der Formel (t in Jahren):

$$K(t) = 1500 \cdot 1{,}02^t$$

Aufgabenstellung:

Was bedeuten die Zahlen 1500 und 1,02 für das Kapitalwachstum?

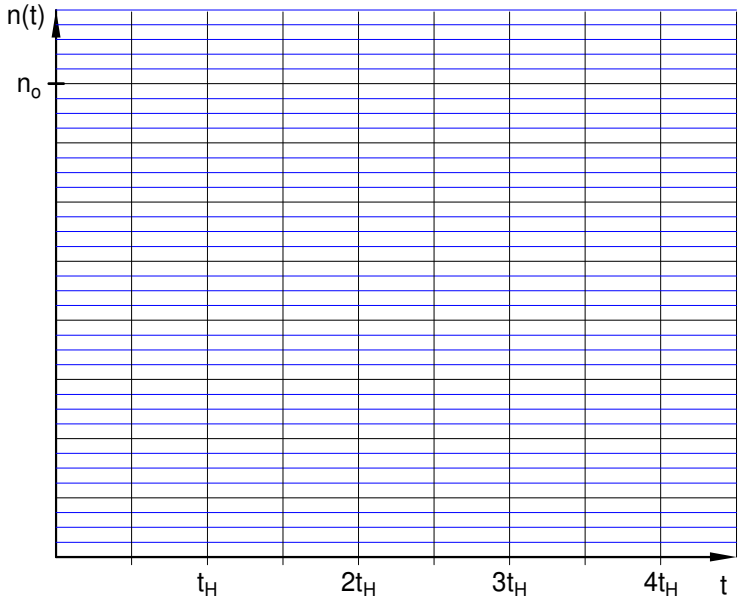
Ad F24, F28:

Radioaktivität – Halbwertszeit

Für den radioaktiven Zerfall ist die Halbwertszeit t_H eine charakteristische Größe.

Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie im Diagramm die Zahl der noch vorhandenen Kerne eines radioaktiven Elements zu den Zeitpunkten t_H, $2 \cdot t_H$, $3 \cdot t_H$, $4 \cdot t_H$ ein, wenn zur Zeit $t = 0$ die Anzahl der radioaktiven Kerne n_o beträgt!



Ad F28:

Zerfall

Von einer radioaktiven Substanz zerfallen 1% dieser Substanz pro Zeiteinheit.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Halbwertszeit der Substanz!

Sinusfunktion, Cosinusfunktion

F 30 Grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge der Art $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x)$ als allgemeine Sinusfunktion erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

F31 Aus Graphen und Gleichungen von allgemeinen Sinusfunktionen Werte(paare) sowie die Parameter *a* und *b* ermitteln und im Kontext deuten können

F32 Die Wirkung der Parameter *a* und *b* kennen und im Kontext deuten können

F33 Periodizität als charakteristische Eigenschaft kennen und im Kontext deuten können

F34 Wissen, dass gilt: $cos(x) = sin(x + \pi/2)$

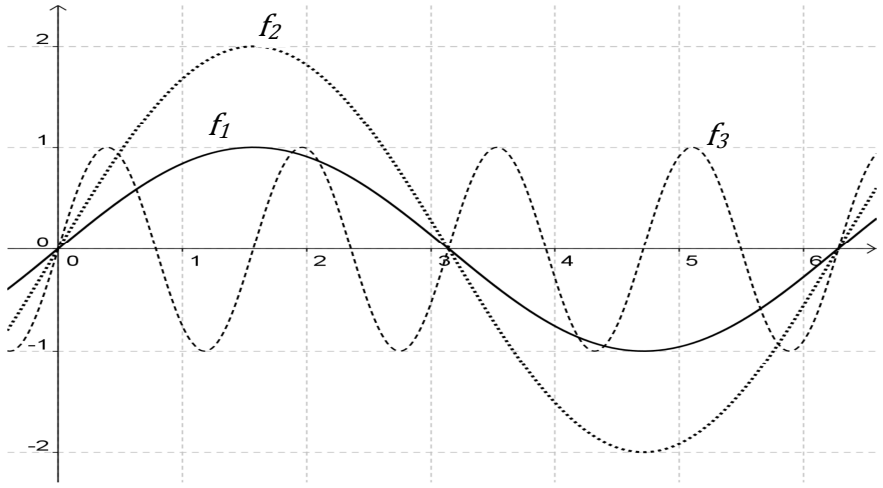
F35 Wissen, dass gilt: $[sin(x)]' = cos(x)$, $[cos(x)]' = -sin(x)$

Anmerkung: Während zur Auflösung von rechtwinkeligen Dreiecken *sin*, *cos* und *tan* verwendet werden, beschränkt sich die funktionale Betrachtung (weitgehend) auf die allgemeine Sinusfunktion. Wesentlich dabei sind die Interpretation der Parameter (im Graphen wie auch in entsprechenden Kontexten) sowie der Verlauf des Funktionsgraphen und die Periodizität.

Ad F30:

Sinusfunktion

In der folgenden Abbildung sind der Graph der Funktion f_1 mit $f_1(x) = \sin(x)$ sowie die Graphen zweier weiterer Funktionen vom Typ $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ dargestellt.



Aufgabenstellung:

Geben Sie für f_2 und f_3 je eine zugehörige Funktionsgleichung mit konkreten Werten für *a* und *b* an!

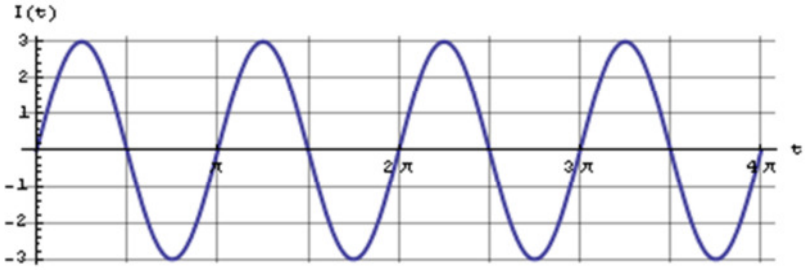
Ad F31:

Wechselstrom

Der zeitliche Verlauf der Stromstärke *I(t)* mit

$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega \cdot t)$

ist in der folgenden Graphik dargestellt (*I* in Ampere, *t* in Sekunden):



Aufgabenstellung:

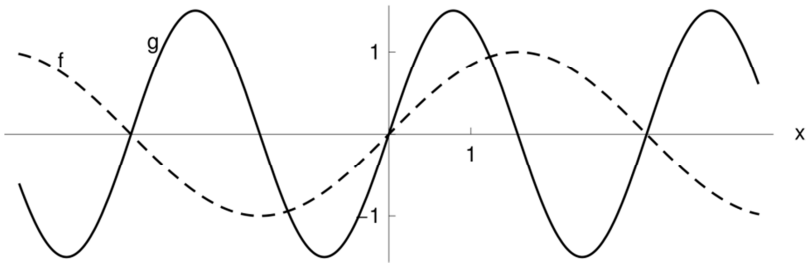
Lesen Sie aus der Graphik den Scheitelwert I_0 der Stromstärke und den Wert der Kreisfrequenz ω ab!

I_0 = …… ω = ……

Ad F32:

Sinusfunktion

Gegeben ist die Funktion *f* mit $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x)$ mit bestimmten Parametern $a \neq 0$, $b \neq 0$. Im Diagramm ist der Graph von *f* strichliert dargestellt, zusätzlich ist der Graph einer Funktion *g* vom selben Typ eingezeichnet.



Aufgabenstellung:

Welche Änderungen muss man an den Parametern *a* und *b* vornehmen, damit man aus der Funktion *f* die Funktion *g* erhält? Kreuzen Sie an:

	vergrößern	verkleinern	beibehalten
Man muss den Wert von *a* …	○	○	○
Man muss den Wert von *b*...	○	○	○

Inhaltsbereich Analysis

Änderungsmaße

A1 Absolute und relative (prozentuelle) Änderungsmaße unterscheiden und angemessen verwenden können

A2 Den Zusammenhang Differenzenquotient (mittlere Änderungsrate) – Differentialquotient ([momentane] Änderungsrate) auf der Grundlage eines intuitiven Grenzwertbegriffes (verbal und auch in formaler Schreibweise) beschreiben können

A3 Einfache Regeln des Differenzierens kennen und anwenden können: Potenzregel, Summenregel, Regeln für $[k \cdot f(x)]'$ und $[f(k \cdot x)]'$

A4 Den Differenzen- und Differentialquotienten (aus Funktionsgleichungen, -graphen, allenfalls auch -tabellen) ermitteln können

A5 Den Differenzen- und Differentialquotienten in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch den Differenzen- bzw. Differentialquotienten beschreiben können

Anmerkung: Der Fokus liegt auf dem Darstellen von Änderungen durch Differenzen von Funktionswerten, durch prozentuelle Veränderungen, durch Differenzenquotienten und durch Differentialquotienten, ganz besonders aber auch auf der Interpretation dieser Veränderungsmaße im jeweiligen Kontext.
Die Ermittlung des Differentialquotienten aus Funktionsgleichungen beschränkt sich auf Polynomfunktionen, Potenzfunktionen sowie auf die Fälle $[\sin(k \cdot x)]' = k \cdot \cos(k \cdot x)$, $[\cos(k \cdot x)]' = -k \cdot \sin(k \cdot x)$ und $[e^{kx}]' = k \cdot e^{kx}$.

Ad A1:

Preisänderung

In einem Fachgeschäft wurde ein TV-Gerät zu Beginn des Jahres 2011 zu einem Preis von p_1 angeboten, ein Jahr später zu einem Preis von p_2.

Aufgabenstellung:

Was bedeuten die Terme $p_2 - p_1$, $\frac{p_2}{p_1}$, $\frac{p_2 - p_1}{p_1}$ in diesem Kontext?

Was bedeutet es (im vorliegenden Kontext), wenn der zweite Term einen Wert kleiner als 1 annimmt? Welchen Wert wird dann der dritte Term annehmen?

Ad A2 und A5:

Fallhöhe eines Steins

Ein Stein wird zur Zeit $t = 0$ aus einer größeren Höhe fallen gelassen. Die Fallhöhe hängt von der Zeit ab. Sie gibt an, wie viele Meter der Stein nach einer bestimmten Zeit (in Sekunden) nach unten gefallen ist.

Die Fallhöhe wird durch die Funktion h beschrieben.

Aufgabenstellungen:

Was bedeuten in diesem Zusammenhang folgende Terme:

(i) $\frac{h(t) - h(0)}{t}$

(ii) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{h(t) - h(0)}{t}$

Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Termen im vorliegenden Kontext!

Ad A3:

Ableitungsfunktionen

Gegeben sind die Funktionsgleichungen $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$, $g(x) = 0{,}5 \cdot \sin(2x)$ und $h(t) = e^{-0{,}2t}$.

Aufgabenstellung:

Ermitteln Sie die Gleichungen der Ableitungsfunktionen von f, g und h!

Ad A4:

Änderungsmaße ermitteln

Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon f(x) = x^2 + 1$.

Aufgabenstellung:

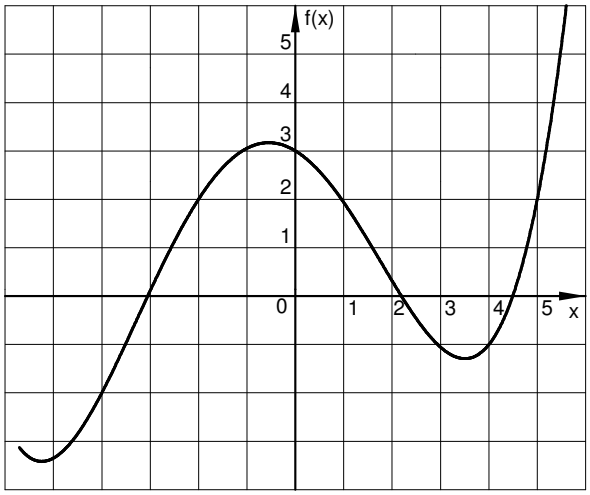
Ermitteln Sie die folgenden Änderungsmaße der Funktion f:

Der Differenzenquotient der Funktion f im Intervall [0; 2] beträgt: .....

Der Differentialquotient der Funktion f an der Stelle 3 beträgt: ……

Änderungsmaße bestimmen

Gegeben ist der Graph der Funktion *f*.



Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die folgenden Änderungsmaße der Funktion *f* :

Der Differenzenquotient der Funktion *f* im Intervall [–4; –2] beträgt: .....

Der Differentialquotient der Funktion *f* an der Stelle 3,5 beträgt ca. ……

Ad A5:

Luftdruckabnahme

Der Luftdruck nimmt bei Normalverhältnissen mit zunehmender Höhe ab.

Durch eine Funktion *L* wird jeder Seehöhe[1] *h* [in m] der zugehörige Luftdruck *L(h)* [in hPa] zugeordnet.

Aufgabenstellung:

Was bedeutet in diesem Zusammenhang der Term $\frac{L(h_2) - L(h_1)}{h_2 - h_1}$?

Ableitungsfunktion/Stammfunktion

A6 Die Begriffe Ableitungsfunktion/Stammfunktion kennen und zur Beschreibung von Funktionen einsetzen können

A7 Den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion (bzw. Funktion und Stammfunktion) in deren grafischer Darstellung erkennen und beschreiben können

[1] Unter „Seehöhe“ versteht man die Höhe über dem mittleren Meeresspiegel.

A8 Eigenschaften von Funktionen mit Hilfe der Ableitung(sfunktion) beschreiben können: Monotonie, lokale Extrema, Links- und Rechtskrümmung, Wendestellen

Anmerkung: Der Begriff der Ableitung(sfunktion) soll verständig und zweckmäßig zur Beschreibung von Funktionen eingesetzt werden.

Ad A6:

Funktion, Ableitungs- und Stammfunktion

Es ist f eine reelle Funktion, F eine Stammfunktion von f und f' die Ableitungsfunktion von f.

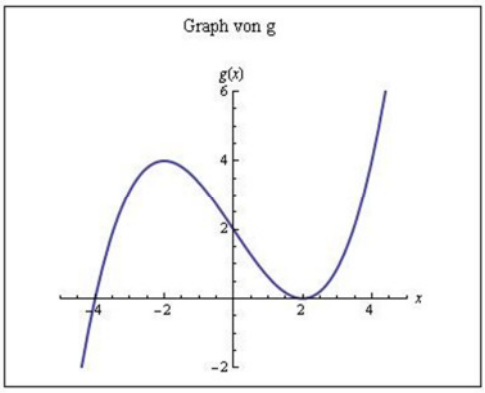
Aufgabenstellung:

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen F und f mit Hilfe des Begriffs des Ableitungsfunktion, den Zusammenhang zwischen f und f' mit Hilfe des Begriffs der Stammfunktion!

Ad A7:

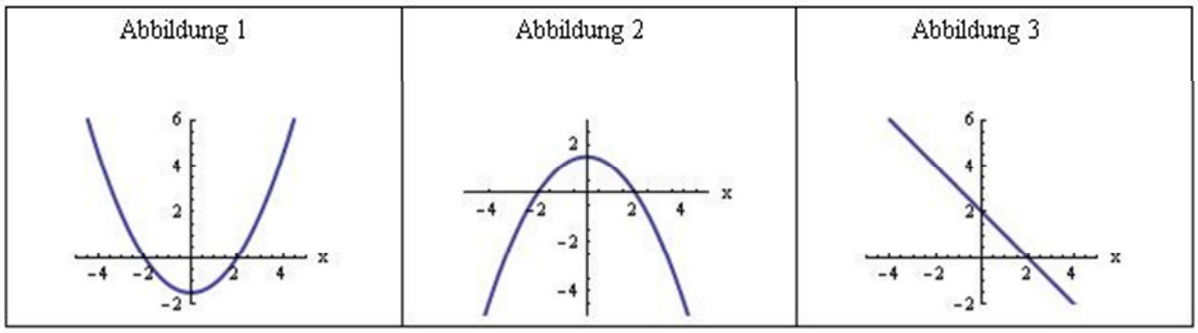
Graph der Ableitungsfunktion

Gegeben ist der Graph der Polynomfunktion g:



Aufgabenstellung:

Einer der drei unten gezeichneten Graphen stellt die Ableitungsfunktion von g dar. Streichen Sie die beiden anderen Graphen durch und begründen Sie, warum diese beiden Graphen auszuschließen sind!



Ad A8:

Bruttosozialprodukt

In der Schlagzeile einer Zeitung liest man: „Das Bruttosozialprodukt ist im Laufe der letzten fünf Jahre zwar gestiegen, aber das Wachstum ist stetig zurückgegangen."
Die Entwicklung der Höhe des Bruttosozialprodukts in Abhängigkeit von der Zeit wird mit einer Polynomfunktion f modelliert.

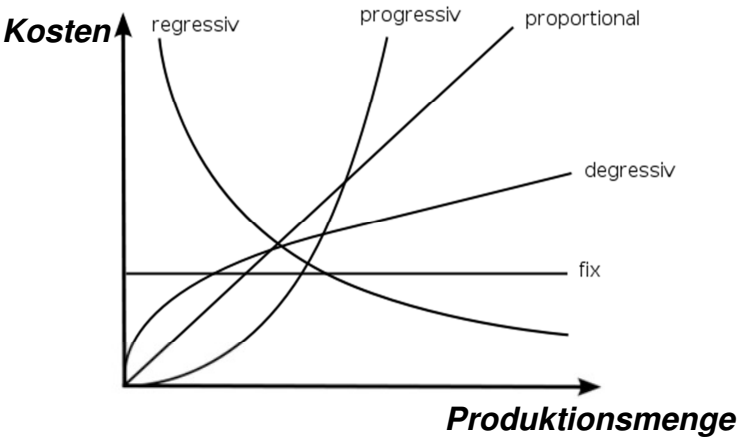
Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle an, welche der folgenden Aussagen zutreffend bzw. nicht zutreffend sind!

	zutreffend	nicht zutreffend
f' fällt in diesen fünf Jahren monoton.	O	O
Die Werte von f' sind in diesen fünf Jahren negativ.	O	O
Die Werte von f'' sind in diesen fünf Jahren negativ.	O	O
f fällt in diesen fünf Jahren monoton.	O	O
Der Wert des Differentialquotienten von f wird im Laufe dieser fünf Jahre kleiner.	O	O

Kostenverläufe

In Büchern zur Kostentheorie findet man für bestimmte typische Verläufe der Kostenfunktion die folgenden Bezeichnungen (siehe Skizze):



Aufgabenstellung:

Charakterisieren Sie mit Hilfe mathematischer Charakteristika (z. B. Monotonie, Krümmung bzw. erste und zweite Ableitung) das Typische an einem „degressiven" Kostenverlauf!

Summation und Integral

A9 Den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten deuten und beschreiben können

A10 Bestimmte Integrale von Polynomfunktionen ermitteln können

A11 Das bestimmte Integral in verschiedenen Kontexten deuten und entsprechende Sachverhalte durch Integrale beschreiben können

Anmerkung: Analog zum Differentialquotienten liegt der Fokus beim bestimmten Integral bei der Beschreibung entsprechender Sachverhalte durch bestimmte Integrale sowie vor allem bei der angemessenen Interpretation des bestimmten Integrals im jeweiligen Kontext. Die Berechnung bestimmter Integrale beschränkt sich auf Polynomfunktionen.

Ad A9 und A11:

Deutung des Integals

Das bestimmte Integral kann als Grenzwert einer Summe von Produkten aufgefasst werden.

Aufgabenstellung:

Erklären Sie den Begriff des bestimmten Integrals als Grenzwert einer Summe von Produkten anhand der Ermittlung eines Flächeninhalts!

(Hinweis: Argumentieren Sie anhand einer geeigneten grafischen Darstellung!)

Ad A10 und A11:

Bewegungsverlauf

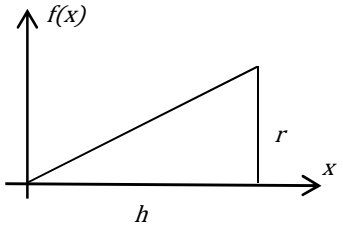
Die Bewegung eines Körpers kann durch die Geschwindigkeitsfunktion v mit $v(t) = 36 - t^2$ beschrieben werden.

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Länge des Weges, den der Körper in den ersten sechs Sekunden zurücklegt!

Flächeninhalt eines Dreiecks

Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Katheten r und h (siehe Grafik).



Aufgabenstellung:

Zeigen Sie mit Hilfe eines Integrals, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks $\frac{r \cdot h}{2}$ beträgt!

Inhaltsbereich Wahrscheinlichkeit und Statistik

Beschreibende Statistik

WS1 Werte aus tabellarischen und elementaren statistischen Grafiken ermitteln und im jeweiligen Kontext deuten können: Stab-, Kreis-, Linien-, Streudiagramm, Prozentstreifen, Kastenschaubild

WS2 Tabellen und elementare statistische Grafiken erstellen, zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

WS3 Stärken, Schwächen und Manipulationsmöglichkeiten elementarer statistischer Grafiken nennen und in Anwendungen berücksichtigen können

WS4 Statistische Kennzahlen für einfache Datensätze ermitteln und im jeweiligen Kontext deuten können: absolute und relative Häufigkeiten; arithmetisches Mittel, Median, Modus; Quartile; Spannweite, Quartilabstand und empirische Varianz/Standardabweichung

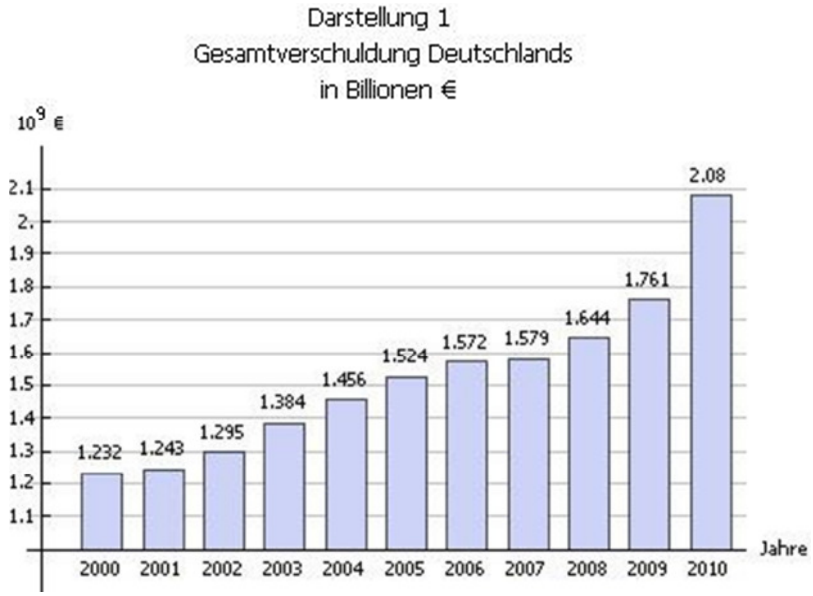
WS5 Wichtige Eigenschaften des arithmetischen Mittels, des Medians und der Quartilen angeben und nutzen, die Entscheidung für die Verwendung eines bestimmten Zentralmaßes begründen können

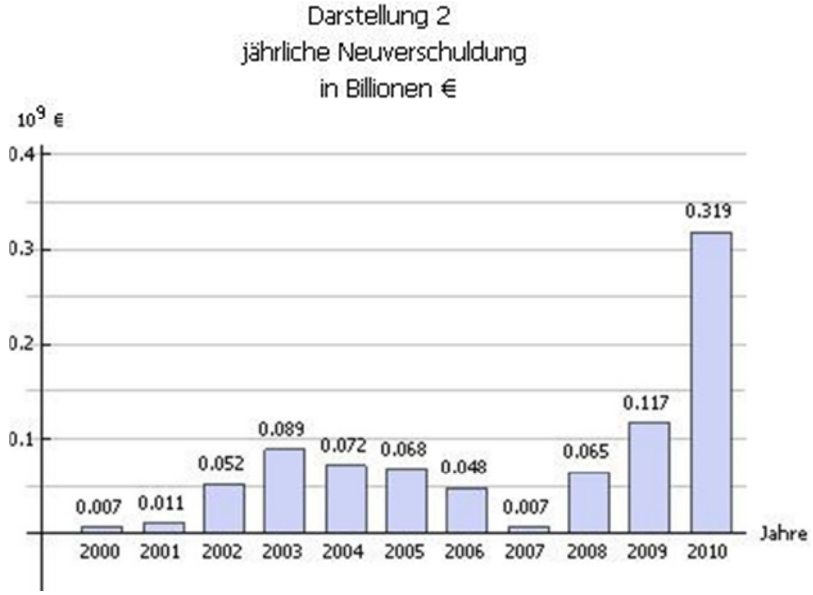
Anmerkung: Wenn auch statistische Kennzahlen (für einfache Datensätze) ermittelt werden und elementare statistische Grafiken erstellt werden sollen, liegt das Hauptaugenmerk doch auf verständigen Interpretationen von Grafiken (unter Beachtung von Manipulationen) und Kennzahlen. Speziell für das arithmetische Mittel und den Median (auch als Quartilen) müssen die wichtigsten Eigenschaften (definitorische Eigenschaften, Datentyp-Verträglichkeit, Ausreißerempfindlichkeit) gekannt und verständig eingesetzt bzw. berücksichtigt werden. Beim arithmetischen Mittel sind allenfalls erforderliche Gewichtungen zu beachten („gewogenes arithmetisches Mittel“) und zu nutzen (Bildung des arithmetischen Mittels aus arithmetischen Mitteln von Teilmengen).

Ad WS1:

Staatsverschuldung

Darstellung 1 zeigt die Entwicklung der Gesamtverschuldung Deutschlands im letzten Jahrzehnt. Darstellung 2 stellt die jährliche "Neuverschuldung" dar. Das ist jener Betrag, um den sich in einem Haushaltsjahr die Gesamtverschuldung gegenüber dem Vorjahr erhöht.





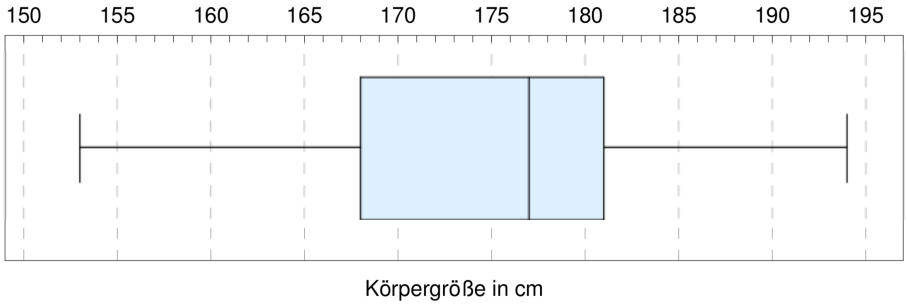
Aufgabenstellungen:

a) Beschreiben Sie die Entwicklung der Gesamtverschuldung unter Verwendung der beiden Grafiken in Worten!

b) Stellen Sie den jährlichen prozentualen Zuwachs der Gesamtverschuldung für die Finanzkrisenjahre 2007 bis 2010 in einer Tabelle und graphisch dar!

Grundwehrdienst

Beim Stellungstermin wurden unter anderem die Körpergrößen von 120 Rekruten festgehalten. Diese sind hier zusammengefasst in Form eines Diagramms dargestellt:



Aufgabenstellung:

Setzen Sie in den folgenden Aussagen die richtigen Zahlen ein:

Aus dem Diagramm kann man entnehmen, dass

- ca. 50% der Rekruten kleiner als …… cm sind.
- jeder Rekrut mindestens …… cm groß ist.
- von den 120 Rekruten ca. …… Rekruten mindestens 181 cm groß sind.
- von den 120 Rekruten ca. …… Rekruten größer als 168 cm sind.
- ca. …… Rekruten zwischen 168 cm und 181 cm groß sind.

Ad WS2 und WS4:

Mathe-Hausübung

In einer Klasse geben die 30 Schülerinnen und Schüler an, wie viele Minuten sie für ihre letzte Mathematik-Hausübung aufgewendet haben. In der folgenden Liste sind die angegebenen Zeiten bereits geordnet:

0, 0, 10, 10, 10, 10, 12, 13, 15, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 30, 30, 30, 30, 30, 35, 35, 35, 40, 40, 45, 45, 45, 60

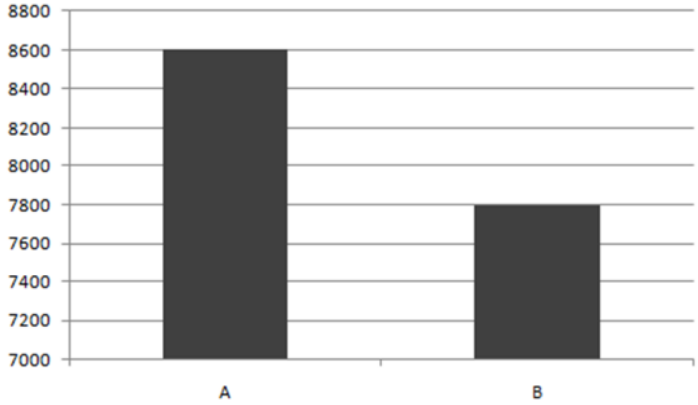
Aufgabenstellungen:

a) Zeichnen Sie ein Kastenschaubild für diese Daten!
b) Formulieren Sie drei Aussagen, die Sie <u>aus diesem Kastenschaubild</u> entnehmen können!

Ad WS3:

Manipulation Urlaubsgäste

In einem Ferienort A zählte man in der letzten Saison 8600 Gäste, im Ferienort B hingegen 7800. Das abgebildete Stabdiagramm veranschaulicht die Anzahl der Gäste in beiden Ferienorten.

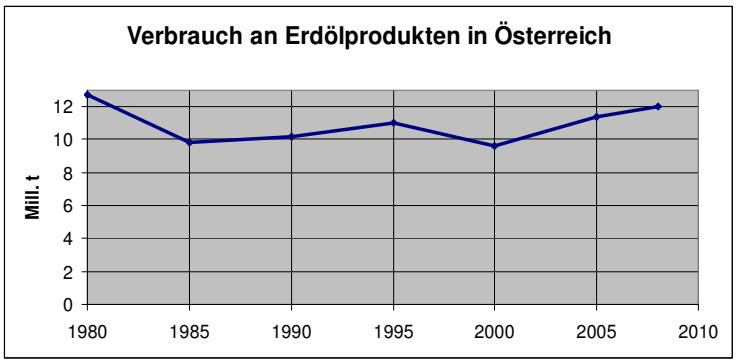


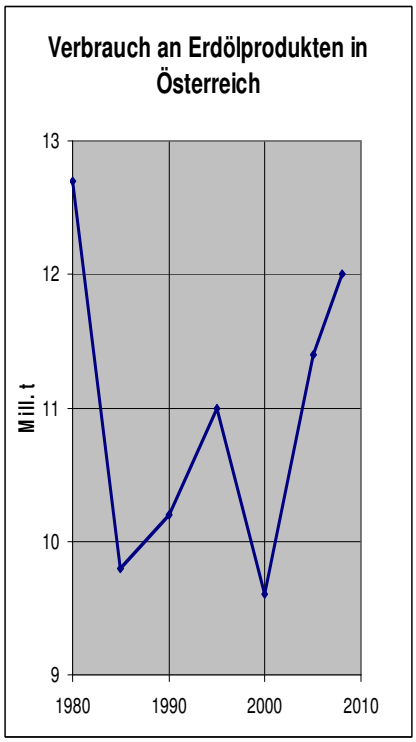
Aufgabenstellung:

Zeichnen Sie ein Stabdiagramm, das den Unterschied in der Gästezahl der beiden Ferienorte deutlich geringer erscheinen lässt!

Erdölprodukte

In den beiden Liniendiagrammen ist derselbe Datensatz dargestellt, die optische Wirkung ist aber sehr unterschiedlich.





Aufgabenstellung:

Welche Merkmale der linken Grafik wurden wie verändert, um die rechte Grafik zu erzeugen?

Ad WS4:

Test

Sieben Schüler absolvieren einen Test. Das arithmetische Mittel, über alle von den Schülern erreichten Punktwerte, ist 11. Ein achter Schüler, welcher während der ersten Testung krank war, schreibt den Test nach. Nimmt man den von ihm erreichten Punktwert dazu, erhöht sich das arithmetische Mittel über alle acht Punktwerte auf 12.

Aufgabenstellung:

Geben Sie an, wie viele Punkte der neue Schüler im Test erreicht hat!

Nettojahreseinkommen

Die folgende Tabelle veranschaulicht die Verteilung der Nettojahreseinkommen der 2008 in Österreich unselbständig Erwerbstätigen (ohne Lehrlinge), das sind insgesamt 3,856.469 Personen.

	Verteilungsmaße des Nettojahreseinkommens der im Jahre 2008 in Österreich unselbständig Erwerbstätigen					
	10%	25%	50%	75%	90%	arithm. Mittel
	… der unselbständig Erwerbstätigen hatten 2008 ein Nettojahreseinkommen von weniger als …. Euro					
Frauen	1.724	6.491	14.009	20.541	28.175	14.979
Männer	3.403	13.629	21.066	28.926	40.578	23.337
Insgesamt	2.317	9.151	17.759	25.277	34.932	19.421

Quelle: Statistik Austria

Aufgabenstellungen:

a) Ermitteln Sie die Anzahl der im Jahre 2008 in Österreich unselbständig erwerbstätigen Frauen bzw. Männer!
b) Ermitteln Sie das Medianeinkommen der Männer sowie das obere und das untere Quartil! Was könnte der Grund dafür sein, dass das Medianeinkommen deutlich unter dem arithmetischen Mittel liegt?

Ad WS5:

Modellierung des Durchschnitts

Für die Angabe von Durchschnittsgehältern (z. B. in einem Betrieb/Unternehmen) wird häufig der Median verwendet.

Aufgabenstellung:

Nennen Sie einen Grund, der bei der Angabe von Durchschnittsgehältern für die Verwendung des Median und gegen die Verwendung des arithmetischen Mittels spricht!

Wahrscheinlichkeit

WS6 Wahrscheinlichkeiten als relative Anteile bzw. als relative Häufigkeiten in Versuchsserien wie auch umgekehrt relative Anteile bzw. Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten interpretieren können; das empirische Gesetz der großen Zahlen und seine Bedeutung für die Häufigkeitsinterpretation von Wahrscheinlichkeit erklären können

WS7 Begriff und Schreibweise bedingter Wahrscheinlichkeiten angemessen einsetzen und interpretieren können; bedingte Wahrscheinlichkeiten sowie Additions- und Multiplikationsregel intuitiv anwenden können

WS8 Die Gleichungskette

relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einer Stichprobe ≈ Wahrscheinlichkeit von E = relativer Anteil einer Teilmenge A in der Grundgesamtheit

interpretieren können und als Grundidee der Wahrscheinlichkeitsrechnung bzw. der Schließenden Statistik erklären können

WS9 Die Begriffe Zufallsgröße, Wahrscheinlichkeitsverteilung (binomialverteilter Zufallsgrößen), Dichte- und Verteilungsfunktion (normalverteilter Zufallsgrößen), Erwartungswert sowie Varianz/Standardabweichung in Kommunikationssituationen verständig deuten bzw. einsetzen können

WS10 Werte einer Binomialverteilung bzw. Intervallwahrscheinlichkeiten einer Binomial- oder Normalverteilung ermitteln können; Erwartungswert und Varianz/Standardabweichung binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln können

WS11 Situationen erkennen und beschreiben können, in denen mit Binomialverteilung bzw. mit Normalverteilung angemessen modelliert werden kann

WS12 Symmetrische Intervalle um den Erwartungswert („Schätzbereiche“ für Zufallsvariable) als wichtiges Mittel zur Beschreibung des Verhaltens von Stichproben kennen; Schätzbereiche für relative Häufigkeiten (bei Modellierung mit Binomial- oder Normalverteilung) ermitteln können, den Zusammenhang zwischen Stichprobengröße, Intervallbreite und Sicherheit allgemein beschreiben und in konkreten Situationen erläutern können

Anmerkung: Zentral ist der mathematische Begriff der Wahrscheinlichkeit als Konzept zur Quantifizierung des Zufalls (bzw. der Sicherheit/Unsicherheit). Dazu müssen die beiden Wahrscheinlichkeitsinterpretationen (als relativer Anteil bzw. als relative Häufigkeit in einer Versuchsserie/Stichprobe) sicher und verständig beherrscht werden. Für die Häufigkeitsinterpretation der Wahrscheinlichkeit ist das empirische Gesetz der großen Zahlen grundlegend.
In der oben angeführten Gleichungskette kommt die wichtige Rolle des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als Bindeglied zwischen den beiden Statistiken (zwischen Grundgesamtheit und Stichprobe) zum Ausdruck: Die Gleichungskette von rechts nach links gelesen verweist auf ein zentrales Konzept der Wahrscheinlichkeitsrechnung (Schluss von der Grundgesamtheit auf die Stichprobe – Schätzbereich). Die Gleichungskette von links nach rechts gelesen verweist auf die Hochrechnung (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit) als ein zentrales Konzept der Schließenden Statistik.
In fast allen entsprechenden und praktisch relevanten Situationen wird mit Normalverteilung modelliert, sodass dieser (stetigen) Wahrscheinlichkeitsverteilung beson-

dere Bedeutung beigemessen wird. Die Binomialverteilung ist ein diskretes Modell, das sich gut für die Hinführung zur Normalverteilung eignet.
Die Ermittlung von Werten der Binomial- bzw. der Normalverteilung kann anhand von Tabellen oder mit entsprechender Technologie erfolgen (Berechnungen zur Binomialverteilung bleiben auf die Fälle $n = 10$ und $n = 20$ beschränkt).

Ad WS6:

Knaben- und Mädchengeburten

In verschiedenen statistischen oder auch medizinischen Berichten findet man die folgende Aussage (sinngemäß):

„Wenn in Österreich ein Kind geboren wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um einen Knaben handelt, ca. 51,4%, die Wahrscheinlichkeit für eine Mädchengeburt beträgt entsprechend ca. 48,6%“.

Aufgabenstellung:

Wie können Statistiker(innen) bzw. Mediziner(innen) zu einer derartigen Wahrscheinlichkeitsaussage kommen?

Das empirische Gesetz der großen Zahlen

Das empirische Gesetz der großen Zahlen ist eine wesentliche Grundlage der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Schließenden Statistik.

Aufgabenstellung

Erläutern Sie die oben angeführte Aussage!
(Was besagt das empirische Gesetz der großen Zahlen? Für welche Wahrscheinlichkeitsinterpretation ist dieses Gesetz von zentraler Bedeutung und warum? Welche Bedeutung hat dies für die Schließende Statistik?)

Ad WS7:

Brillenträger(innen)

Die folgende Tabelle enthält Informationen über Geschlecht und Sehvermögen einer Gruppe von 200 Personen:

	Männer	Frauen	Summe
Brille	40	25	65
keine Brille	100	35	135
Summe	140	60	200

Aufgabenstellung:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P(Mann | Brille), dass eine zufällig ausgewählte Person mit Brille ein Mann ist?

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P(Brille | Mann), dass ein zufällig ausgewählter Mann Brillenträger ist?

Ad WS6 und WS7:

Blutgruppe A

20 (zufällig ausgewählte) Österreicher(innen) spenden Blut. Man weiß, dass 40% aller Österreicher(innen) Blutgruppe A haben.

Aufgabenstellung:

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist oder nicht und kreuzen Sie entsprechend an!

	zutreffend	nicht zutreffend
Die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten zwei Personen beide Blutgruppe A haben, beträgt 0,16.	○	○
Wenn die ersten fünf Personen nicht Blutgruppe A haben, beträgt die Wahrscheinlichkeit, Blutgruppe A zu haben, für die 6. Person mehr als 0,4.	○	○
Es müssen genau 8 der 20 Personen Blutgruppe A haben.	○	○
Die Wahrscheinlichkeit, dass die letzte Person nicht Blutgruppe A hat, ist höher als die Wahrscheinlichkeit, dass sie Blutgruppe A hat.	○	○

Ad WS8:

Grundidee der Wahrscheinlichkeitsrechnung und der Schließenden Statistik

Es gilt:

relative Häufigkeit eines Ereignisses E in einer Stichprobe ≈ Wahrscheinlichkeit von E = relativer Anteil einer Teilmenge A in der Grundgesamtheit

Aufgabenstellung:

Erklären Sie, in welchem Sinne in der angegebenen Gleichungskette die Grundidee der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie auch der Schließenden Statistik zum Ausdruck kommt!

Ad WS9:

Zierfische

Die Körperlänge einer bestimmten Zierfischart wird normalverteilt angenommen mit einem Mittelwert μ = 3,5 cm und einer Standardabweichung von σ =0,8 cm.

Aufgabenstellung:

Ergänzen Sie die fehlenden Zahlenwerte:

(i) Rund 95 % dieser Zierfische sind zwischen _____cm und _____cm groß.

(ii) Rund _____ % dieser Zierfische sind kleiner als 3,5 cm.

(iii) Rund 16 % sind größer als _____cm.

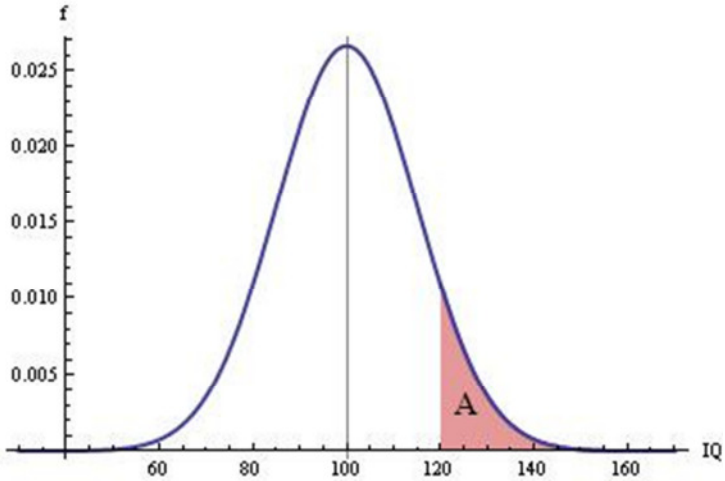
Ad WS6 und WS9:

Intelligenzquotient

In wikipedia ist zu lesen:

„*Intelligenztests liegt die Annahme zu Grunde, dass der Intelligenzquotient (IQ) der Bevölkerung normalverteilt ist. Damit beschreibt der IQ die Abweichung vom Mittelwert 100, die Standardabweichung beträgt 15 IQ-Punkte.*“

Die Verteilung des IQ ist durch den Graph der Dichtefunktion f in folgender Grafik dargestellt



Aufgabenstellung:

Der Inhalt der Fläche A ist etwa 0,09. Interpretieren Sie diese Zahl im gegebenen Kontext!

Ad WS10 und WS11:

Binomial- und Normalverteilung

B ist eine 20-0,4-binomialverteilte Zufallsgröße.

Aufgabenstellungen:

a) Ermitteln Sie $P(6 \leq B \leq 10)$!

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von B!

c) Jemand berechnet $P(6 \leq B \leq 10)$ „näherungsweise“ mit Hilfe einer Normalverteilung (mit gleichem Erwartungswert und gleicher Standardabweichung wie in b)). Was meinen Sie dazu?

Ad WS12:

Anteil an Akademiker(inne)n

Im Jahre 2008 betrug der Akademiker(innen)anteil in Österreich 12,0%, d. h., 12,0% aller Österreicherinnen und Österreicher im Alter von 25 Jahren und darüber hatten ein abgeschlossenes Hochschulstudium.
Wenn man unter allen Österreicher(inne)n (25 Jahre und älter) eine geeignete Stichprobe zieht, erwartet man, dass in dieser Stichprobe ebenfalls ungefähr 12,0% Akademiker(innen) sind.

Aufgabenstellung:

Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung lassen sich die Formulierungen „erwartet man“ und „ungefähr“ mathematisch präzisieren und quantifizieren.
Beschreiben Sie, in welcher Weise diese Präzisierungen bzw. Quantifizierungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfolgen und formulieren Sie eine entsprechende Aussage für 1000 zufällig ausgewählte Österreicher(innen)!

Wählerbefragung

Bei der letzten Gemeinderatswahl erhielt die XPÖ 60% aller gültigen Stimmen.

Im Zuge einer Wählerstromanalyse werden nach der Wahl 100 Personen, die gültig gewählt haben, befragt. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich in dieser Stichprobe zwischen 51,9% und 68,1% XPÖ-Wähler befinden, beträgt etwa 90%.

Aufgabenstellungen:

a) Würde sich das Intervall [51,9%; 68,1%] bei einer größeren Stickprobe (und gleichbleibender Sicherheit von 90%) vergrößern, verkleinern oder gleich bleiben?

b) Würde sich bei gleichbleibendem Stichprobenumfang das Intervall [51,9%; 68,1%] bei einer größeren Sicherheit (z. B. 95%) vergrößern, verkleinern oder gleich bleiben?

Erläutern Sie den jeweiligen Sachverhalt anhand einer passenden Formel!

Schließende Statistik

WS13 Konfidenzintervalle für relative Anteile in der Grundgesamtheit ermitteln und im jeweiligen Kontext interpretieren können; Zusammenhang zwischen Sicherheit und Intervallbreite kennen und bei der Modellierung angemessen berücksichtigen können; Formel(n) für die Stichprobengröße interpretieren (Zusammenhang mit Sicherheit, Intervallbreite und Stichprobenparameter) und erforderliche Stichprobengröße daraus ermitteln können

Anmerkung: Die Ermittlung von Konfidenzintervallen bzw. der Stichprobengröße erfolgt anhand entsprechender Formeln (nur für normalverteilte Modellierung) und ist damit recht einfach. Zentral sind die Interpretation von Konfidenzintervallen im jeweiligen Kontext sowie die Zusammenhänge zwischen Stichprobenumfang, Intervallbreite und Sicherheit.

Ad WS13:

Sonntagsfrage

„Wenn am kommenden Sonntag Wahl wäre …"
Basierend auf Umfrageergebnissen wird ein 0,95-Konfidenzintervall für den derzeitigen Stimmenanteil einer Partei A mit [16,6%; 19,8%] angegeben.

Aufgabenstellung:

Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob sie für den gegebenen Sachverhalt sinnvoll oder nicht sinnvoll ist!

	sinnvoll	nicht sinnvoll
95 von 100 Personen gaben an, mit einer Wahrscheinlichkeit von rund 16,6% Partei A zu wählen.	☐	☐
Mehr als ein Fünftel der befragten Personen stimmt für Partei A.	☐	☐
Bei gleicher Anzahl von befragten Personen würde ein 90%-Konfidenzintervall für den Stimmenanteil von Partei A eine kleinere Intervallbreite haben.	☐	☐
Hätte man doppelt so viele Personen gefragt, wäre die Intervallbreite des Konfidenzintervalls größer.	☐	☐
Der Wähleranteil der Partei A liegt mit großer Sicherheit im Intervall [16,6%; 19,8%].	☐	☐

Rauchgewohnheiten Wiener Schüler(innen)

Für einen Report in einer Schülerzeitung zum Thema "Rauchgewohnheiten von Schüler(inne)n" wurde eine Umfrage durchgeführt. Dazu wurden 120 Wiener Schüler(innen) im Alter von 16 - 21 Jahren zufällig ausgewählt und zu ihren Rauchgewohnheiten befragt. 30 von ihnen gaben an, mindestens eine Zigarette pro Tag zu rauchen.

In der Schülerzeitung ist zu lesen: "Jeder vierte Wiener Schüler / jede vierte Wiener Schülerin über 16 raucht täglich."

Aufgabenstellungen:

a) Geben Sie ein 95%-Konfidenzintervall an, um die Verlässlichkeit dieser Aussage abzuschätzen!
b) Wie groß hätte man die Stichprobe wählen müssen, um ein 95%-Konfidenzintervall mit einer Intervallbreite von $2\varepsilon = 4\%$ zu erhalten?