

Lehrveranstaltung „Mathematik 1“

Universitätslehrgang zur Vorbereitung auf die Studienberechtigung

Die Prüfungsvorbereitung für die Fachprüfung aus Mathematik erfolgt extern oder durch Teilnahme an dem an der Universität angebotenen Lehrgang (4 Wst. für M1, M2, M3 jeweils im WS und 3 Wst. im SS, für M2 und M3 noch 1 Wst. im SS)

Die Teilnahme am Lehrgang ist kostenpflichtig.

Die Fachprüfung besteht aus einem schriftlichen Teil (max. 180 Min.) und einem mündlichen Teil (ca. 30 Min.). Prüfungstermine sind jeweils Ende Juni, Anfang Oktober und Anfang Februar.

Prüfungsanforderungen MATHEMATIK 1,2,3

Mathematik 1:

Rechenregeln, elementare Algebra; Gleichungen und Ungleichungen; lineare Gleichungssysteme; Vektoren, Matrizen; elementare Funktionen und Anwendungen; Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung (nur Potenz- und Polynomfunktionen); Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mathematik 2:

Mathematik 1 und lineare Ungleichungssysteme; Winkelfunktionen, Trigonometrie.

Mathematik 3:

Mathematik 1,2 und komplexe Zahlen; Vektorrechnung (Analytische Geometrie); Erweiterung der Differential- und Integralrechnung.

Prüfungsmethode: schriftlich und mündlich

Die Prüfung besteht aus einem schriftlichen Teil und einem mündlichen Teil.

Im schriftlichen Teil der Prüfung sind Aufgaben zu verschiedenen Themen zu lösen. Im mündlichen Teil wird überwiegend die Kenntnis von Begriffen und deren Anwendungsbereichen überprüft.

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner der TI-30er-Familie oder ähnliche Geräte anderer Hersteller; approbierte Formelsammlung

Literatur: Grundsätzlich sind alle aktuellen Lehrbücher für Oberstufenformen geeignet. Im Lehrgang wird der Lehrstoff anhand des vorliegenden Skriptums behandelt.

Formelsammlung:

Folgende Formelsammlungen sind vom Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur approbiert und können im Rahmen der Prüfung verwendet werden:

- Tabellen und Formeln, Ausgabe AHS; Floderer, Manfred; Groß Herbert; öbv, Wien
- Formelsammlung Mathematik für allgemeinbildende höhere Schulen; Bossek, Hubert; Engelmann, Lutz; Fanghänel, Günther; Liesenberg, Günter; Stamm, Reinhard; Weber, Karlheinz; Veritas Verlags-u. Handels-GmbH, Linz
- Formelsammlung Mathematik für AHS und BBS; Bös, Astrid; Schütz, Christiane; Verlag E. DORNER, Wien
- Mathematische Formelsammlung; Götz, Stefan; Unfried Hubert; öbv, Wien

Achtung:

Am 1. Termin erfolgt nach der Vorbesprechung sofort der Einstieg in den Lehrgang. Dazu werden die Seiten 3-14 dieser Aufgabensammlung benötigt.

Weitere Infos zur Studienberechtigung:

<http://www.uni-klu.ac.at/hlg/sber/>

A. Zahlbereiche

1. Natürliche Zahlen

Zum Zählen von Gegenständen erfunden.

$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen

$N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen ohne 0

Primzahlen $P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \dots\}$

= Zahlen, die nur durch sich oder 1 teilbar sind

Gibt Anzahlen, Rangplätze oder Messergebnisse an.

Können am Zahlenstrahl dargestellt werden.

2. Ganze Zahlen

Zur Angabe von Temperaturen (-8°C), Kontoständen, Meereshöhen,...

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ = Menge der ganzen Zahlen

Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl. Es gilt also: $N \subset Z$

Zahlenstrahl!!!

3. Rationale Zahlen (Bruchzahlen)

Um Anteile, Bruchteile anzugeben (Hälfte, $\frac{3}{4}$,...)

$Q = \{x \mid x = p/q \text{ mit } p \in Z \text{ und } q \in N^*\}$

= Menge der rationalen Zahlen

Definition: $Bruch = \frac{\text{Zähler}}{\text{Nenner}}$ Achtung: Nenner darf nie Null sein!

Jede ganze Zahl kann als Bruch angeschrieben werden: $\frac{9}{3}, -\frac{4}{2}, \dots$

Es gilt also $Z \subset Q$

Bruchdarstellung - Dezimaldarstellung

Dezimaldarstellung:

Endlich oder unendlich; periodisch oder nicht periodisch

Endliche Dezimalzahlen und periodische Dezimalzahlen lassen sich immer als Bruch anschreiben!

Zahlenstrahl!!!

4. Irrationale Zahlen

Sind Zahlen, die sich nicht als Bruch anschreiben lassen: Unendliche, nicht periodische Zahlen!

Bsp.: π , e , $\sqrt{2}$,...

SATZ: Jede Zahl $\sqrt{n}$ mit $n \in N$ ist irrational, falls n keine Quadratzahl ist.

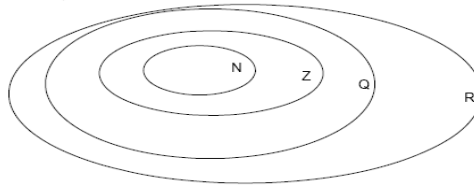
Zahlenstrahl!!!

5. Reelle Zahlen

Die rationalen Zahlen und die irrationalen Zahlen zusammen ergeben die **reellen Zahlen R**.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Bsp.: Fügen Sie die Zahlen π , $\frac{3}{4}$, $(-2)^2$, $\sqrt{16}$, 0 in das folgende Diagramm ein und setzen Sie in der Tabelle die Symbole $\in$ und $\notin$ ein.



	R	Z	N	Q
π				
$(-2)^2$				
$\sqrt{16}$				
0				
$\frac{3}{4}$				

Runden

Näherungsweise Bestimmen von Zahlen

Ist die Zahl rechts von der Rundungsstelle kleiner als 5 wird abgerundet, sonst aufgerundet.

6. Intervalle

Bereich von reellen Zahlen

Endliche Intervalle:

$[2; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 5\}$ Alle reellen Zahlen zwischen 2 und 5, wobei die „Ränder“ 2 und 5 zum Intervall gehören.
(abgeschlossenes Intervall)

$[2; 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x < 5\}$ 5 gehört dem Intervall nicht an.
(rechts offenes Intervall)

$]2; 5] = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x \leq 5\}$ 2 gehört dem Intervall nicht an.
(links offenes Intervall)

$]2; 5[= \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 5\}$ Weder 2 noch 5 gehören dem Intervall an. **(offenes Intervall)**

1.58 Schreib den angegebenen Bereich der reellen Zahlen als Intervall an und kennzeichne ihn auf einem geeigneten Ausschnitt der Zahlengeraden.

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\}$ d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2,5 \leq x \leq 5\}$
b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x \leq 6\}$ e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 < x \leq -5\}$
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -1,5\}$ f) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 2\}$

1.59 Schreib als Menge an.

a) $[3; 6]$ b) $]5; 8,9[$ c) $] -7; -2,5]$ d) $[0; 3,7[$ e) $] -2,3; 0,5[$

Unendliche Intervalle:

$$[a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$$

$$]a; \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$$

$$]-\infty; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq x \leq b\}$$

$$]-\infty; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty \leq x < b\}$$

B. Grundrechnungsarten, Rechengesetze, Teilbarkeit, kgV, Rechnen mit Brüchen

Grundrechnungsarten

Grundrechnungsart	Glieder der Rechnung	Ergebnis
Addition	Summand + Summand	Summe
Subtraktion	Minuend - Subtrahend	Differenz
Multiplikation	Faktor · Faktor	Produkt
Division	Dividend : Divisor	Quotient

3. Rechenstufe (höchste): Potenzieren, Wurzelziehen

2. Rechenstufe: Multiplikation, Division

1. Rechenstufe: Addition, Subtraktion

„Höhere Rechenstufe vor niedrigerer Rechenstufe!“ (z.B. Punkt- vor Strichrechnung)

Rechengesetze

Kommutativgesetz: $a + b = b + a$
 Assoziativgesetz: $a + (b + c) = (a + b) + c$
 Distributivgesetz: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Klammerregeln:

$+(+a) = +a$ $- (+a) = -a$
 $+(-a) = -a$ $- (-a) = +a$

Vorzeichenregeln:

$(+a) \cdot (+a) = +a^2$ $\frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$
 $(+a) \cdot (-a) = -a^2$ $\frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$
 $(-a) \cdot (+a) = -a^2$ $\frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$
 $(-a) \cdot (-a) = +a^2$ $\frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$

Satz über die Primfaktorenzerlegung

Jede natürliche Zahl $n > 1$ lässt sich eindeutig als Produkt von Primzahlen darstellen!

Dazu muss man allerdings die Zahl teilen können. Hilfreich:

Teilbarkeitsregeln

Eine Zahl ist teilbar durch

- 2, wenn sie gerade ist.
- 3, wenn die Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.
- 5, wenn sie mit 0 oder 5 endet.

Für „Teiler von sein“ gibt es ein mathematisches Zeichen: z.B. $3 \mid 24$ „3 teilt 24“ oder „3 ist Teiler von 24“

Ist folgende Aussage richtig? (zur Kontrolle Division ausführen)

23 | 276 ..ja 17 | 24 .. nein

Bsp. Primfaktorenzerlegung

Zerlege 120 in ein Produkt von Primfaktoren: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Bsp.:

Primfaktorenzerlegung für 108, 1650!

kgV kleinstes gemeinsames Vielfaches

... ist die kleinste Zahl, in der zwei oder mehrere Zahlen ohne Rest enthalten sind. Es setzt sich aus allen vorkommenden Primfaktoren in ihrer höchsten Potenz zusammen.

Bsp.:

$$\text{kgV}(24, 90, 120) = 360$$

$$\text{kgV}(39, 118, 172) =$$

Größter gemeinsamer Teiler, ggT (notwendig, um in einem Schritt zu kürzen)

Berechnung: Produkt der niedrigsten Potenz der bei jeder Zahl vorkommenden Primfaktoren

$$\text{Bsp.: ggT}(28, 70) = 14$$

Betrag einer ganzen Zahl

Unter dem Betrag einer Zahl versteht man den Abstand der Zahl als Punkt auf dem Zahlenstrahl vom Nullpunkt.

$$|x| = x$$

$$|-x| = x$$

Auf Zahlenstrahl einzeichnen: $|-3| = 3$ $|+4| = 4$

Bsp.:

- $|(+20)| \cdot |(-5)| - |(-15)| \cdot |(+6)| =$
- $(+20) \cdot |(-5)| - (-15) \cdot |(+6)| =$
- $|(+20) \cdot (-5)| - (-15) \cdot |(+6)| =$
- $[|(-1,5)| - |(+4)|] \cdot (-8) =$

Rechnen mit Brüchen

Erweitern von Brüchen: Zähler und Nenner mit gleicher Zahl multiplizieren

Kürzen: Zähler und Nenner durch gleiche Zahl dividieren
„Aus Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen!“

Addition und Subtraktion:
mittels kgV auf gemeinsamen Nenner bringen!

$$\begin{aligned} \text{Bsp.: } 6\frac{3}{8} + 3\frac{7}{8} + 4\frac{5}{8} + \frac{1}{8} &= \\ \frac{3}{2} - \frac{4}{5} - \frac{11}{15} &= \\ 5\frac{3}{8} - 1\frac{7}{10} + 2\frac{9}{16} &= \end{aligned}$$

Multiplikation und Division:

$$\text{Multiplikation: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

„Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner“

$$\text{Division: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

„Mit Kehrwert multiplizieren!“ ODER
„Außenglied mal Außenglied durch
Innenglied mal Innenglied“

Übungsblatt 1: Rechenregeln-Rechnen mit Brüchen

Ohne TR, nur die Probe mit TR!

1) a) $(-4) \cdot (+2) + (-3) \cdot (-7) =$
c) $(-5) \cdot (-2) + (-8) : (+2) =$

b) $(+8) \cdot (-9) - (-3) \cdot (-2) =$
d) $(+16) : (-4) - (-1) \cdot (-5) =$

2) a) $(+25) \cdot (+2) - (-3) \cdot (+6) + (-5) \cdot (+3) =$

b) $(-8) \cdot (-4) + (+7) \cdot (-2) - (-4) =$

3) a) $(-33) : (+11) - (-10) + (+34) : (-17) =$

b) $(+50) : (+10) + (-60) : (-20) + (+9) =$

4) a) $(+1,2) : (-4) + (-2) \cdot (-5) =$
c) $(-3,3) : (+1,1) + (+3,4) : (-1,7) =$

b) $(-14,8) : (-2) - (+26,4) : (-11) =$
d) $(+81) : (-0,9) - (+0,7) \cdot (+10) =$

5) a) $\left(3\frac{1}{8} - 2\frac{2}{3}\right) : \frac{3}{4} + 1\frac{1}{6} \cdot 5\frac{1}{3} =$

b) $\left(2\frac{4}{9} - 2\frac{1}{6}\right) \cdot 7\frac{1}{2} - \frac{5}{16} : 1\frac{1}{8} =$

c) $1\frac{1}{5} : \frac{8}{15} - 2\frac{1}{7} \cdot \left(2\frac{1}{15} - 1\frac{3}{10}\right) =$

6) a) $\left(3\frac{1}{5} - 1\frac{2}{3}\right) : \frac{4}{5} + 1\frac{5}{6} \cdot \frac{3}{22} =$

b) $\left(2\frac{4}{9} + 1\frac{1}{6}\right) \cdot 1\frac{4}{5} - 3\frac{2}{5} : 34 =$

c) $\left(5\frac{1}{8} - 3\frac{5}{6}\right) \cdot 3\frac{1}{3} - \frac{8}{9} : 5\frac{1}{3} =$

d) $4\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{16} - \left(3\frac{1}{10} - 1\frac{3}{5}\right) : 9 =$

7) a) $\left(3\frac{1}{3} + \frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{9}\right) : \left(1\frac{3}{8} - \frac{11}{6} : 7\frac{1}{3}\right) =$

b) $\left(\frac{5}{12} : 3\frac{1}{3} + 1\right) : \left(1\frac{1}{4} - 1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}\right) =$

8) a) $\frac{1\frac{1}{8} + 2\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}}{1 - 1\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{22}} =$

b) $\frac{2 - \frac{3}{8} : 2\frac{1}{4}}{1\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{14} + 2\frac{1}{3}} =$

c) $\frac{1 - 2\frac{1}{5} \cdot \frac{3}{22}}{1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4}} =$

9) a) $\frac{2\frac{1}{4} - 1\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8}}{\frac{5}{12} \cdot 3\frac{1}{3} + 1} =$

b) $\frac{2\frac{1}{6} - \frac{5}{8} \cdot 1\frac{1}{3}}{3 - 1\frac{3}{10} \cdot \frac{15}{26}} =$

c) $\frac{2 - 1\frac{7}{9} \cdot \frac{3}{4}}{1\frac{8}{15} - \frac{7}{10} \cdot 1\frac{2}{3}} =$

[Lösungen: 1)a) 13 b) -78 c) 6 d) -9 2)a) 53 b) 22 3)a) 5 b) 17 4)a) 9,7 b) 9,8 c) -5 d) -97 5)a) $\frac{41}{6}$ b) $\frac{65}{36}$ c) $\frac{17}{28}$ 6)a) $2\frac{1}{6}$ b) $6\frac{2}{5}$ c) $4\frac{5}{36}$ d) $3\frac{19}{24}$ 7)a) $3\frac{1}{3}$ b) $1\frac{1}{26}$ 8)a) $2\frac{19}{22}$ b) $\frac{22}{29}$ c) $1\frac{3}{25}$ 9)a) $\frac{75}{86}$ b) $\frac{16}{27}$ c) $1\frac{9}{11}$

Übungsblatt 2: Rechnen mit Brüchen- Primfaktorenzerlegung

11) a) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$ b) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6} =$ c) $\frac{36}{5} - \frac{13}{4} - \frac{7}{3} =$
 d) $\frac{15}{2} + \frac{17}{3} - \frac{24}{5} =$ e) $\frac{116}{15} - \frac{391}{60} + \frac{13}{6} =$ f) $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{3}{16} - \frac{1}{7} =$

12) Zerlege folgende Zahlen in Primfaktoren:

a) 48 b) 650 c) 1128 d) 819 e) 3675

13) Bestimme von folgenden Zahlenpaaren bzw. -tripeln das kgV und den ggT:

a) (48, 112) b) (24, 34) c) (42, 56)
 d) (40, 45) e) (15, 20, 47) f) (39, 118, 172)

14) a) $\frac{12}{21} \cdot 15 =$ b) $\frac{27}{5} : 9 =$ c) $\frac{65}{12} : \frac{13}{2} =$ d) $\frac{16}{81} \cdot 18 =$ e) $\frac{19}{21} : \frac{2}{3} =$ f) $\frac{14}{3} \cdot \frac{8}{77} =$

15) a) $\left(\frac{7}{12} - \frac{7}{8} + \frac{3}{5}\right) \cdot \frac{15}{74} =$ b) $\left(\frac{55}{12} - \frac{11}{3} + \frac{1}{7}\right) : \frac{2}{21} =$ c) $\left(\frac{254}{51} - \frac{35}{6} + \frac{149}{34}\right) : \frac{45}{34} =$

16) a) $\left(\frac{49}{15} + \frac{41}{9}\right) \cdot \left(22 - \frac{113}{8} - \frac{9}{4}\right) =$ b) $\left(\frac{29}{5} + \frac{79}{20}\right) : \left(\frac{209}{24} + \frac{71}{12} - \frac{13}{8}\right) =$

17) a) $\left[\left(+\frac{7}{9}\right) \cdot 8 - \frac{77}{18}\right] \cdot \left(-\frac{21}{15}\right) + \frac{1}{5} =$ b) $\left[\left(+\frac{165}{21}\right) - \left(-\frac{89}{7}\right)\right] \cdot \left[\left(+\frac{8}{5}\right) + \left(-\frac{4}{27}\right)\right] =$

18) a) $5\frac{1}{2} + 2\frac{1}{10} - 1\frac{4}{15} - 3\frac{5}{6} + 4\frac{2}{3} =$ b) $5\frac{3}{4} - \left(2\frac{3}{5} + 1\frac{1}{2}\right) + 2\frac{7}{20} =$

**[Lösungen: 11)a) $1\frac{11}{12}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $1\frac{37}{60}$ d) $8\frac{11}{30}$ e) $3\frac{23}{60}$ f) $\frac{75}{112}$ 12)a) $2^4 \cdot 3$ b) $2 \cdot 5^2 \cdot 13$
 c) $2^2 \cdot 3 \cdot 47$ d) $3^2 \cdot 7 \cdot 13$ e) $3 \cdot 5^2 \cdot 7^2$ 13)a) 336 bzw. 16 b) 408 bzw. 2 c) 168 bzw. 14 d) 360 bzw. 5
 e) 2820 bzw. 1 f) 395772 bzw. 1 14)a) $\frac{60}{7}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{5}{6}$ d) $\frac{32}{9}$ e) $\frac{19}{14}$ f) $\frac{16}{33}$ 15)a) $\frac{1}{16}$ b)
 11 $\frac{1}{8}$ c) $\frac{8}{3}$ 16)a) 44 b) $\frac{3}{4}$ 17)a) $-\frac{227}{90}$ b) $\frac{448}{15}$ 18)a) $7\frac{1}{6}$ b) 4]**

C. Rechnen mit Variablen und Termen

1. Grundbegriffe

Eine **Variable** ist ein Buchstabe (oder ein anderes Symbol), der als Platzhalter für eine Zahl dient. Ein **Term** ist ein sinnvoller, mathematischer Ausdruck, der aus Zahlen, Variablen und Rechenzeichen besteht.

Bsp.: $5r+27t$ Term $x - :8$ kein Term

Die **Grundmenge** eines Terms ist die Menge aller Zahlen, die für die Belegung der Variablen des Terms vorgesehen sind.

Der **Wert** eines Terms ist das numerische Ergebnis, das man erhält, wenn man für die Variable(n) bestimmte Zahlen einsetzt.

Bsp.: Bestimme die Wertemenge des Terms $T(x) = \frac{3x-1}{x-2}$ für die Grundmenge $G = \{1,2,3\}$!

$$T(1) = \frac{3-1}{-1} = \frac{2}{-1} = -2 \qquad T(2) = \frac{6-1}{2-2} = \frac{5}{0} = \text{Error} \qquad T(3) = \frac{9-1}{3-2} = \frac{8}{1} = 8$$

$W = \{-1,8\}$

2. Rechnen mit Potenzen

Potenz:

Basis, Exponent (Hochzahl) a^b „a wird b mal mit sich selbst multipliziert“

$$a^0 = 1$$

Addition, Subtraktion von Potenzen:

Potenzen lassen sich genau dann addieren und subtrahieren, wenn sowohl ihre Basen als auch ihre Exponenten übereinstimmen! Bsp.: $x^3 + 4x^3 = 5x^3$

Multiplikation, Division von Potenzen:

Multiplikation und Division von Potenzen sind möglich, wenn die Basen gleich sind!

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Multiplikation: Potenzen werden multipliziert, indem man ihre Hochzahlen addiert:

Bsp.: $x^3 \cdot x^4 = x^7$ => „Um eine Rechenstufe herunter!“

Division: Potenzen werden dividiert, indem man ihre Hochzahlen subtrahiert!

Bsp.: $\frac{x^8}{x^3} = x^5$ => „Um eine Rechenstufe herunter!“

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Umschreibregel für negative Hochzahlen:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Potenzieren von Potenzen, Wurzelziehen:

Potenzieren: Potenzen werden potenziert, indem man die Hochzahlen multipliziert!

Bsp.: $(x^3)^4 = x^{12}$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

Wurzelziehen: Aus einer Potenz wird die Wurzel gezogen, indem man die Hochzahl durch den Wurzelexponenten dividiert:

Bsp.: $\sqrt[7]{x^5} = x^{\frac{5}{7}} \Rightarrow$ „Um eine Rechenstufe herunter!“

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Mit dieser Umschreibregel ist es möglich, jede Wurzel als Potenz darzustellen. Dann wird mit den Potenzrechenregeln weitergerechnet.

Weitere Regeln:

1.) Ein Produkt wird potenziert, indem man jeden Faktor potenziert!
(Bsp.: $(a \cdot b)^3 = a^3 \cdot b^3$)

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

2.) Ein Bruch wird potenziert, indem man sowohl den Zähler als auch den Nenner potenziert!

(Bsp.: $\left(\frac{a}{b}\right)^5 = \frac{a^5}{b^5}$)

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Klammern ausmultiplizieren: „Jedes mit jedem!“

$$(2a + 3) \cdot (a - 4) = 2a^2 - 8a + 3a - 12 = 2a^2 - 5a - 12$$

Binomische Formeln:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Wichtige Zerlegungsformel:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Herausheben (Faktorisieren):

Aus einer Differenz oder Summe ein Produkt bilden (gemeinsame Faktoren herausheben):
Zuerst Koeffizienten auf ggT untersuchen, dann Variable in niedrigster vorkommender Potenz übernehmen und eventuell noch untersuchen, ob eine Formel vorliegt!

Bsp.: $12p^5 - 30p^3 + 18p = 6p \cdot (2p^4 - 5p^2 + 3)$

Auf gemeinsamen Nenner (GN) bringen

kgV der einzelnen Nenner bilden

Bsp.: $\frac{1}{2x+6} - \frac{1+x}{x^2-9} + \frac{4x}{x^2+6x+9} =$

Polynomdivision:

Dividieren von Termen wie mit Zahlen

$$(x^2 - x + 18) : (x + 3) = x - 4 + \frac{30}{x + 3}$$

$$\begin{array}{r} +x^2 + 3x \\ -4x + 18 \\ \hline -4x - 12 \\ \hline 30R \end{array}$$

Übungsblatt 3: Rechnen mit Variablen und Termen

21)a) $62x-9y-(41x-11y)-(x-18y)$

Probe: $x=0; y=1$

b) $6x-[(3x+2y)+2x]-(8x+9y)$

Probe: $x=1; y=-1$

22)a) $(3x-4y)-[5y+(7y-2x)-(8x-y)]$

Probe: $x=2; y=-2$

b) $10x+[(7y-12x)-(5y+12x-13)]-13$

Probe: $x=1; y=2$

23)a) $-a-(-b)+\{-3a-[-7+(2a-3b)]\}$

Probe: $a=-1; b=0$

b) $5x+7y-\{3z+[13x-(2y+7x)]-7z\}$

Probe: $x=0; y=1; z=2$

24)a) $5s+10t-\{-[(8s+9t)]-7s+(-8t)\}$

Probe: $s=2; t=1$

b) $3u-4v-\{[5u-(3v+2u)-6v]+8u\}$

Probe: $u=1; v=-1$

25) $3f-7g-\{(3f-2g)-[(3g+8f)-2g]-[(7g-8f)+2g]\}$

Probe: $f=3; g=-2$

26)a) $a^3 \cdot a^5$

b) $b \cdot b^7$

c) $c^{10} \cdot c^2$

d) $b^4 (-b)^3$

e) $(-c)^3 (-c)^2$

27)a) $a^{7-x} \cdot a^x$

b) $b^{5-n} \cdot b^{n-5}$

c) $c^{3x} \cdot c^{-x+8}$

d) $d^x \cdot d^{x+1} \cdot d^2$

28)a) $(x+y)^2 (x+y)$

b) $(a-b)^3 (a-b)^5$

c) $(x^2-y^2) (x^2-y^2)$

29)a) $a^{x+1} : a^x$

b) $a^{5-x} : a^{-x+5}$

c) $b^7 : b^{10}$

d) $d^{-a+1} : d^{-2a}$

e) $x^{2s-t} : x^{s+t}$

30)a) $\frac{C^{15}}{C^7}$

b) $\frac{d \cdot d^4}{d^{10}}$

c) $\frac{b^{x+3}}{b^{7+x}}$

d) $\frac{c^{6-x}}{c^{-x-9}}$

e) $\frac{d^{5+x} \cdot d^{9-2x}}{d^{-x+14}}$

31) Schreibe folgende Potenzen als Produkte von Potenzen:

a) a^2

b) b^{x+1}

c) c^{x+y}

d) d^{a+b+1}

e) e^{3+x}

32)a) $(a^3)^5$

b) $(-b^7)^3$

c) $[(-c)^4]^6$

d) $[(-d)^3]^3$

e) $(-e^2)^3$

33)a) $(x^2y^3)^5$

b) $(-2x)^2$

c) $(5y^3)^3$

d) $(3a^2bc^3)^4$

e) $(5^2st^35s^3)^2$

34)a) $-3a^4(b^5a+a^6)$

b) $(-2x^4y+x^6y^2+x^7y^3)9x^3y^2$

c) $x^2(3x^2-y^2) - (3x^2+y^2)y^2$

35)a) $(16x^2-9y^3)x + y(9xy+4y)y - 16(x^3-y^2)b$ b) $3[(5-a)7a^2+(4b^2+1)3b^5-(12b^7-3a^3)]$

36)a) $(3x+5)(3x+4)$ b) $(3x-5)(9x+2)$ c) $(ax-3)(ax-5)$ d) $(4x^2-1)(3x+1)$

37)a) $(5a^3-b)(7a^2+b)$ b) $(2x^3-3)(8x^2-9)$ c) $(uv^2+w)(u^2v-w)$

[Lösungen: 21)a) $20x+20y$ b) $-7x-11y$ 22)a) $13x-17y$ b) $-14x+2y$ 23)a) $-6a+4b+7$ b) $-x+9y+4z$ 24)a) $4s+9t$

b) $-8u+5v$ 25) $6f+g$ 26)a) a^8 b) b^8 c) c^{12} d) $-b^7$ e) $-c^5$ 27)a) a^7 b) b^{5-s} c) c^{2x+8} d) d^{2x+3} 28)a) $(x+y)^3$ b) $(a-b)^8$

c) $(x^2-y^2)^2$ 29)a) a) $a^0=1$ c) b^{-3} d) d^{a+1} e) x^{s-2t} 30)a) c^8 b) d^5 c) b^{-4} d) c^{15} e) 1 31)a) a) a b) $b^x b$ c) $c^x c^y$

d) $d^a d^b d$ e) $e^3 e^x$ 32)a) a^{15} b) $-b^{21}$ c) c^{24} d) $-d^9$ e) $-e^6$ 33)a) $x^{10}y^{15}$ b) $4x^2$ c) $125y^9$ d) $81a^8b^4c^{12}$ e) $15625s^8 t^6$

34)a) $-3a^5b^5-3a^{10}$ b) $-18x^7y^3+9x^9y^4+9x^{10}y^5$ c) $3x^4 -4x^2y^2-y^4$ 35)a) $4y^3+16y^2$ b) $105a^2-12a^3+9b^5$

36)a) $9x^2+27x+20$ b) $27x^2-39x-10$ c) $a^2x^2-8ax+15$ d) $12x^3+4x^2-3x-1$ 37)a) $35a^5+5a^3b-7a^2b-b^2$ b) $16x^5-18x^3-$

$24x^2+27$ c) $u^3v^3+u^2vw-uv^2w-w^2$]

Übungsblatt 4: Rechnen mit Variablen und Termen

38)a) $a(b-4) + (4-a)b$

Probe: $a = -1; b = -2$

b) $4[(a-b)3 + 2(a+b)] - [3(a-b) + 2b]$

Probe: $a = -2; b = 1$

39)a) $(2u-w+3s)4z$

b) $(2x+3y-4z)(-a+b)$

c) $(-3y-5z)(-v+2w)$

40)a) $9a[(7-a^2)5a^4 + (2a^3+6)8a^7 - 6a^6(8a+1)]$

b) $(-2x)\{2x^3 - [(3x^2-5) + 4x^2]x\}(-2)$

41)a) $(9x^2+5)(2x^2-4) - (3x+4)(6x-5)$

b) $[(4x^2+7)(3x^3+9) - (2x^2+3)(6x^3+2)]2x^2$

42) $(2x-3y)(4x^2+6xy+y^2) - (4x^2-6xy+y^2)(2x+3y)$

Probe: $x = -1; y = 2$

43)a) $\left(\frac{2x}{y^2}\right)^5$

b) $\left(-\frac{3xy^5}{5z}\right)^3$

c) $\left(-\frac{5x^2y}{ab^4}\right)^3$

d) $\left(\frac{6a^3c}{4b^9}\right)^2$

44)a) $x^6\left(\frac{1}{x^2}\right)^3$

b) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2\left(\frac{y}{x}\right)^4$

c) $\left(\frac{3x}{2y}\right)^3 : \left(\frac{5x}{4y}\right)^4$

d) $\left(\frac{6x^2}{5y^9}\right)^2 : \left(\frac{9x^3}{y^6}\right)^3$

45)a) $\left[\left(-\frac{3x^3}{y^4}\right)^3\left(\frac{4y^4}{5x^2}\right)^2\right] : \left(\frac{6y^3}{5x}\right)^2$

b) $\left[\left(\frac{4x^4}{3y^2}\right)^2\left(\frac{2x^3}{5y}\right)^3\right] : \left[-\left(\frac{8x^4}{15y^2}\right)^2\right]$

46)a) $\left[\left(-\frac{2x^3}{y^2}\right)^3\left(\frac{3y^2}{4x^2}\right)^4\right] : \left(\frac{3y^4}{4x}\right)^2$

b) $\left[\left(\frac{2mn^6}{m^3}\right)^4 : \left(-\frac{4n^3}{5m}\right)^2\right] : \left(\frac{25m^2}{2n^3}\right)^2$

47)a) $(9x-1)^2$

b) $(6a-7b)^2$

c) $(-2a^2b+5b^3)^2$

d) $(5x+y^2)^3$

48) Vereinfache:

a) $(3x+5)(3x-5)$

b) $(x^2+1)(x^2-1)$

c) $(2x-9)(2x+9)$

49)a) $(3x-7)^2 - (3x+1)(3x-1)$ b) $(3a-4)^2 - (4+3a)(4-3a)3 - (9a-7)4a + 32$

50) $(2x+1)^3 - (2x+3)(2x-3)4 + (3x-5)(3x+5) - 8x^2(x-1)$

Probe: $x = -2$

51) $(2x-5)^3 - [2x(2x-5)^2 + (2+6x)(2-6x)5] - 100x$

Probe: $x = 3$

52)a) $\left(\frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y\right)^2$

b) $\left(\frac{a}{9} - \frac{3b}{2}\right)^2$

c) $\left(\frac{x}{2} + \frac{2y}{3}\right)^3$

[Lösungen: 38)a) $-4a+4b$ b) $17a-3b$ 39)a) $8zu-4wz+12sz$ b) $-2ax+2bx-3ay+3by+4az-4bz$ c) $3vy-6wy+5vz-10wz$ 40)a) $144a^{11}-99a^7+315a^5$ b) $4x^4-20x^2$ 41)a) $18x^4-44x^2-9x$ b) $6x^5+64x^4+114x^2$ 42) $-6y^3$ 43)a) $32x^5/y^{10}$ b) $-27x^3y^{15}/125z^3$ c) $-125x^6y^3/a^3b^{12}$ d) $36a^6c^2/16b^{18}$ 44)a) 1 b) x^2 c) $864y/625x$ d) $4/2025x^5$ 45)a) $-12x^7/y^{10}$ b) $-2x^9/5y^3$ 46)a) $-9x^3/2y^6$ b) $4n^{24}/25m^{10}$ 47) a) $81x^2-18x+1$ b) $36a^2-84ab+49b^2$ c) $4a^4b^2-20a^2b^4+25b^6$ d) $125x^3+75x^2y^2+15xy^4+y^6$ 48) a) $9x^2-25$ b) x^4-1 c) $4x^2-81$ 49)a) $-42x+50$ b) $4a$ 50) $13x^2+6x+12$ 51) $160x^2-145$ 52) a) $4x^2/9+xy+9y^2/16$ b) $a^2/81-ab/3+9b^2/4$ c) $x^3/8+x^2y/2+2xy^2/3+8y^3/27$]

Übungsblatt 6: Kürzen, kgV, Bruchterme

Kürze:

64a) $\frac{x^2 - y^2}{y + x}$

b) $\frac{(7x - 3y)^2}{49x^2 - 9y^2}$

c) $\frac{5a^2 - 5ab}{(a - b)^2}$

d) $\frac{7x^3 - x^2y}{7xy^2 - y^3}$

65a) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$

b) $\frac{x^2 - 8x + 16}{2x^2 - 32}$

c) $\frac{2x - 50x^3}{25x^2 - 10x + 1}$

d) $\frac{(x - y)^2}{7xy - 7x^2}$

Bestimme das kgV:

66a) kgV($24x^3$, $26x^4$)

b) kgV($19x^3yz$, $36xyz^2$)

c) kgV($26x$, $13x^2$, $20x^3$)

67a) kgV($240x^5yz$, $90xyz^3$, $112x^2y^3z^2$)

b) kgV($27x^3y^5z$, $36xyz^4$, $195x^6yz^9$)

68a) kgV($4a^2(b-a)$, $12b^2(a^2-b^2)$)

b) kgV($48a^2b^3(a-b)$, $84ab(a^2-b^2)$)

69a) kgV(x^2-81 , $x^2-18x+81$, $x-9$)

b) kgV($2x^2-2$, $2x^2-4x+2$, $5x-5$)

70a) kgV($3x^2+3x$, $5x^3-5x$, $10x^2+10x$)

b) kgV($4a^2b-4ab^2+b^3$, $4a^2b-2ab^2$)

Addition von Bruchtermen:

71a) $\frac{5x}{3y^2} + \frac{19z}{6xy} - \frac{2x}{3y^2} + \frac{7y^2}{6x^2}$

b) $\frac{2b}{3a^2} + \frac{3c}{7ab} + \frac{4b}{3a^2} + \frac{3a}{7b^2}$

72a) $\frac{3x+2y+2z}{4} - \frac{5x+3y}{3} + \frac{x+y-2z}{2}$

b) $\frac{5x+2y+z}{2} - \frac{7x+3y}{3} + \frac{3x+6y-z}{12}$

73a) $\frac{4x^3-3x^2+2x-1}{x^3} - \frac{3x^2-4x-5}{x^2} + \frac{2x-3}{x}$

b) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x+3}$

74a) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}$

b) $\frac{1-x}{1+x} - \frac{1+x}{1-x} + \frac{4x}{1-x^2}$

[Lösungen: 64a) $x-y$ b) $(7x-3y)/(7x+3y)$ c) $5a/(a-b)$ d) x^2/y^2 65a) $(x-3)/(x+3)$ b) $(x-4)/(2x+8)$ c) $(2x+10x^2)/(1-5x)$ d) $(y-x)/7x$ 66a) $312x^4$ b) $684x^3yz^2$ c) $260x^3$ 67a) $5040x^5y^3z^2$ b) $7020x^6y^5z^9$ 68a) $-12a^2b^2(a-b)(a+b)$ b) $336a^2b^3(a^2-b^2)$ 69a) $(x+9)(x-9)^2$ b) $10(x+1)(x-1)^2$ 70a) $30x(x^2-1)$ b) $2ab(2a-b)^2$ 71a) $(6x^3+19xyz+7y^4)/6x^2y^2$ b) $(3a^3+14b^3+3abc)/7a^2b^2$ 72a) $(-5x-6z)/12$ b) $(5x+6y+5z)/12$ 73a) $(3x^3-2x^2+7x-1)/x^3$ b) $(3x+5)/[(x+1)(x+2)(x+3)]$ 74a) $(2a^2+2b^2)/(a^2-b^2)$ b) 0]

D. Lösen von linearen Gleichungen und Ungleichungen

1. Wie geht man nun beim Lösen einer Gleichung vor?

- Man ordnet mit Hilfe der Äquivalenzumformungen Addition und Subtraktion die Variablen auf der einen Seite und die bekannten Größen auf der anderen Seite der Gleichung.
- Nun fasst man gleichartige Summanden zusammen.
- Zuletzt bestimmt man den Zahlenwert der Variablen durch die Äquivalenzumformungen Division oder Multiplikation.
- Durch Vergleich der Lösung mit der Grundmenge wird überprüft, ob der erhaltene Wert auch wirklich Lösung des aktuellen Problems ist.

Wenn ja, wird er in der **Lösungsmenge** angegeben: $L = \{\text{Wert}\}$. Ist der Wert nicht Element der Grundmenge, ist die Lösungsmenge leer: $L = \{\}$.

- Anschließend überprüft man die Lösung durch Einsetzen des Wertes in die Angabezeile (=Probe). Erfüllt der Wert die Gleichung, erhält man eine wahre Aussage.

Bsp.:

$$3x + 2 = 4x - 3 \quad / - 3x \quad G=\mathbb{R}$$

$$2 = x - 3 \quad / + 3$$

$$5 = x \quad \Rightarrow \quad L = \{ 5 \}$$

Grundmenge G:

Menge aller Zahlen, die als mögliche Lösungen vorgesehen sind (wird vorgegeben, kann auch nicht sinnvolle Möglichkeiten enthalten)!

Definitionsmenge D:

Menge aller Elemente aus der Grundmenge G, für die die Gleichung einen sinnvollen Zahlenwert ergibt!

(Bestimmen der Definitionsmenge: Nenner gleich 0 setzen und nach x umformen!

Der errechnete Wert für die Variable muss ausgeschlossen werden!)

Lösungsmenge L:

Menge aller Zahlen der Definitionsmenge, für die die Gleichung eine wahre Aussage ergibt!

Bsp.: $\frac{3}{x-4} = 2$ $G = \mathbb{Z}$

- Definitionsmenge D bestimmen:

$$\begin{aligned} x - 4 &= 0 & /+4 \\ x &= 4 & \Rightarrow D = \mathbb{Z} \setminus \{4\} \end{aligned}$$

- Gleichung lösen: $\frac{3}{x-4} = 2 \quad / \cdot (x-4)$

$$3 = 2(x-4)$$

$$3 = 2x - 8 \quad /+8 \quad /:2$$

$$\frac{11}{2} = x \quad \Rightarrow \quad L = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$$

Lösungsmöglichkeiten einer Gleichung:

- bestimmte Anzahl von Lösungen (Wert für x berechenbar)
- keine Lösung (f. A., $L = \{ \}$)
- Unendlich viele Lösungen (w. A., $L = D$)

2. Ungleichungen

Ungleichung: Anstatt des Gleichheitszeichens steht ein Ungleichheitszeichen wie $<$, $>$, $\leq$, $\geq$, $\neq$

Unterschied zu Gleichungen:

- Lösungsmenge meistens ein größerer Bereich
- 1 neue Rechenregel: Bei Multiplikation der Ungleichung mit einer negativen Zahl (oder bei Division durch eine negative Zahl) dreht sich das Ungleichheitszeichen um!

Mischungsaufgaben

Musterbeispiel

Ein roter Behälter hat die Aufschrift: *20%igen Salzlösung*, auf einem blauen steht *5%igen Salzlösung*. Der Laborant vermischt 50kg aus dem roten Behälter mit 35 kg aus dem blauen. Wie viel Prozent Salzgehalt hat die erzeugte Mischung?

Lösung:

Wir übersetzen den Text in folgende Tabelle:

	Salzlösung in kg	Salzgehalt in %	Menge des Salzes in kg
Roter Behälter	50	20	$50 \cdot \frac{20}{100} = 50 \cdot 0,2 = 10$
Blauer Behälter	35	5	$35 \cdot \frac{5}{100} = 35 \cdot 0,05 = 1,75$
Mischung	50+35=85	x	$85 \cdot \frac{x}{100} = 0,85x$

Gleichung ergibt sich daraus, dass man die

Salzanteile aus den beiden Behältern addiert und mit dem Salzgehalt der Mischung gleichsetzt:

$$10 + 1,75 = 0,85x$$

Gleichung lösen (entweder händisch, oder mit Taschenrechner): $x = 13,82$

Antwort: Die Mischung hat einen Salzgehalt von 13,82%

Beispiel

Die Firma Safti stellt Apfelsaft aus verschiedenen Apfelsaftkonzentraten her. Es gibt noch 5 Liter 5%iges Apfelsaftkonzentrat. Dieses soll mit 30%igen Apfelsaftkonzentrat vermischt werden. Wie viel 30%iges Konzentrat muss dazu gemischt werden, um 20%igen Fruchtsaft zu erhalten?

- Vervollständige die Tabelle:

	Apfelsaftkonzentrat in Liter	Apfelsaftkonzentrat in %	Menge des Apfelsaftkonzentrats in Liter
Apfelsaftkonzentrat I			
Apfelsaftkonzentrat II			
Mischung			

- Stelle eine Gleichung auf:
- Löse die Gleichung mit deinem Taschenrechner (und gib an, wie du dabei vorgehst):
- Antwort

Wichtige Formel:

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad v = \frac{s}{t}$$

Bewegungsaufgaben

Musterbeispiel

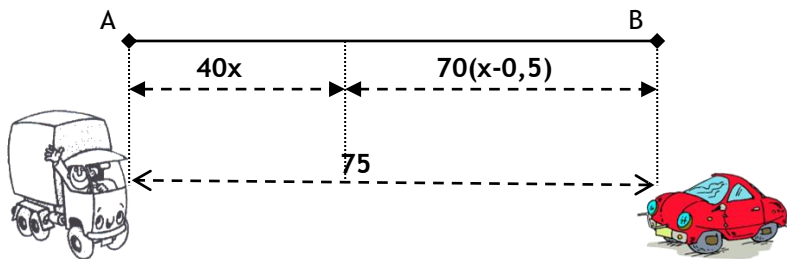
Ein LKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 40km/h um 9 Uhr vom Ort A nach dem 75km entfernten Ort B ab. Eine halbe Stunde später fährt ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 70km/h von B in Richtung A ab.

Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A begegnet der PKW dem LKW?

Lösung:

Wir

versuchen die Situation zu zeichnen



Durch Umformen erhalten wir aus der wichtigen Formel: Geschwindigkeit mal Zeit ist zurückgelegter Weg.

LKW: Zeit, die er unterwegs ist : x
Geschwindigkeit, mit der er fährt: 40
Weg, den der LKW zurücklegt: 40x

PKW: Zeit, die er unterwegs ist : x-0,5 (ist um eine halbe Stunde kürzer als der LKW)
Geschwindigkeit, mit der er fährt: 70
Weg, den der PKW zurücklegt: 70*(x-0,5)

Wie man der Skizze entnehmen kann ergibt sich die Gleichung aus:

Weg des LKW und Weg des PKW ist die Entfernung von A nach B.

$$40x + 70(x-0,5) = 75$$

Diese Gleichung lösen wir (händisch, oder mit dem Solver): $x=1$

Die Fahrt des LKW dauert 1 Stunde.

Sie treffen sich 40 mal 1 also 40km von A entfernt.

Antworten: Sie treffen sich in 40km Entfernung von A entfernt um 10Uhr.

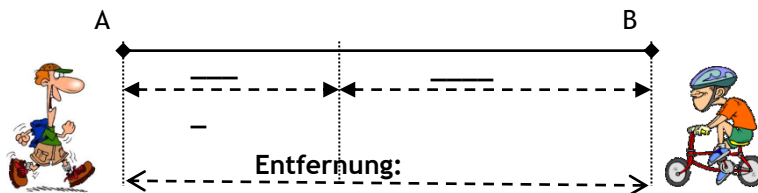
Beispiel

Ein Fußgänger, der 4km in einer Stunde zurücklegt, geht um 8 Uhr vom Ort A nach dem 40km entfernten Ort B ab. Um 9 Uhr verlässt ein Radfahrer den Ort B in Richtung A mit einer Geschwindigkeit von 16km/h.

- a) Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A begegnet der Fußgänger dem Radfahrer?
- b) Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A würde der Radfahrer dem Fußgänger begegnen, wenn er wie der Fußgänger die Strecke von A nach B zurücklegt?

Lösung: Teilaufgabe a)

- Vervollständige die Skizze!



Fußgänger: Zeit, die er unterwegs ist : _____
Geschwindigkeit, mit der er wandert: _____
Weg, den der Wanderer geht: _____

Radfahrer: Zeit, die er unterwegs ist : _____
Geschwindigkeit, mit der er radelt: _____
Weg, den der Radfahrer fährt: _____

- Stelle eine Gleichung auf:
- Löse die Gleichung mit deinem Taschenrechner (und gib an, wie du dabei vorgehst):
- Antwort:

Teilaufgabe b löst du alleine ;-)

Leistungsaufgaben

Musterbeispiel

Ein Wasserbecken mit dem Volumen V wird durch drei Rohre gespeist. Das erste Rohr benötigt 3 Stunden, das zweite vier Stunden und das dritte 6 Stunden, um das Becken zu füllen. In welcher Zeit füllen alle drei Zuleitungen gemeinsam das Becken.

Lösung:

Wir übersetzen den Text in folgende Tabelle:

	Leistung pro Stunde	Betriebsdauer in Stunden	Leistung während der Betriebsdauer
Rohr 1	$\frac{V}{3}$	x	$\frac{V}{3} \cdot x = \frac{Vx}{3}$
Rohr 2	$\frac{V}{4}$	x	$\frac{V}{4} \cdot x = \frac{Vx}{4}$
Rohr 3	$\frac{V}{6}$	x	$\frac{V}{6} \cdot x = \frac{Vx}{6}$

Damit das Becken voll ist, muss man nur die Anteile der drei Rohre addieren und gleich dem Beckenvolumen V setzen:

$$\frac{Vx}{3} + \frac{Vx}{4} + \frac{Vx}{6} = V$$

Lösung der Gleichung:

Man kann V auf der linken Seite herausheben: $V \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6}\right) = V$

Eine Gleichung bleibt richtig, wenn man auf beiden Seiten durch dieselbe Zahl (hier V) dividiert:

$$\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6}\right) = 1$$

Den Rest kann der Taschenrechner (oder du): $x = 1,3 = 1\frac{1}{3}$

Antwort: Das Becken ist mit den drei Rohren in einer Stunde und 20 Minuten gefüllt.

Beispiel

Zur Herstellung von Werbeprospekten sind zwei Maschinen im Einsatz. Maschine 1 benötigt für die gesamte Arbeit 4 Stunden. Beide Maschinen zusammen brauchen 2 Stunden und 24 Minuten. Wie lang braucht Maschine 2, wenn Maschine 1 nicht benützt werden kann?

- Vervollständige die Tabelle:

	Leistung pro Stunde	Betriebsdauer in Stunden	Leistung während der Betriebsdauer
Maschine 1	$\frac{V}{4}$		
Maschine 2	$\frac{V}{x}$		

- Stelle eine Gleichung auf:
- Löse die Gleichung mit deinem Taschenrechner (und gib an, wie du dabei vorgehst):
- Antwort

Übungsblatt 7: Lineare Gleichungen

Löse folgende Beispiele über der Grundmenge Q !

$$128) a) \frac{x}{x-9} = \frac{x+9}{2x} \quad b) \frac{2x+1}{3} + 5 = 3 + \frac{12x+15}{9}$$

$$129) (2x+1)^3 + (x+1)^3 = (2x+1)^2 \cdot 2x + (x+2)^3 + x^2$$

Löse folgende Beispiele über der Grundmenge Z !

$$130) a) 2x + \frac{3x-2}{4} = 4 + \frac{2x+3}{7} \quad b) \frac{x-3}{2} - \frac{3x-13}{2} = \frac{2x+5}{15}$$

$$131) (2x+5)^2 + (3x+4)^2 = (13x+2)(x+1) + 2(15+14x)$$

Löse folgende Beispiele über der Grundmenge Q! Bestimme, wenn notwendig, die Definitionsmenge!

$$132) x+2-\{3x-4-[5x-6-(x+1)]\} = x+1$$

$$133) a) \frac{x+3}{2x-4} = \frac{x+9}{2x} \quad b) \frac{5x}{x-2} - \frac{x}{x+2} = 4$$

$$134) \frac{x}{x^2-6x+9} - \frac{1}{x^2-3x} = \frac{1}{x}$$

135) Die Summe aus der Hälfte und dem Fünfzehntel einer Zahl ist um 19 größer als die Summe aus den Zwanzigstel und dem Fünftel.
Wie lautet die Zahl?

136) Vater und Sohn sind zusammen 44 Jahre alt. Der Vater ist um 22 Jahre älter als der Sohn.
Berechne das Alter von Vater und Sohn!

137) Der Umfang eines Rechtecks beträgt 160 m. Die Breite ist um 6 m kürzer als die Länge.
Berechne die Länge und die Breite dieses Rechtecks!

$$138) \frac{5x+2}{3} - \frac{2x-3}{2} = \frac{x+2}{4} + \frac{2x+21}{10}$$

$$139) (x-5)(10-x) = (3-x)(2+x) + 2(x+20)$$

140) Vermindert man eine Zahl um ihre Hälfte und dieses Ergebnis um sein Drittel, so erhält man 5.
Wie lautet diese Zahl?

Forme nach gegebener Variablen um:

$$141) a) M = \frac{d\pi s}{2} \quad d = ? \quad b) V = \frac{d^2 \pi h}{12} \quad d = ?$$

$$142) a) O = r\pi(r+s) \quad s = ? \quad b) v = \frac{s}{t} \quad t = ?$$

Löse folgende Beispiele über der Grundmenge Q! Bestimme auch die Definitionsmenge!

$$143) a) \frac{x+2}{2-x} + \frac{x-2}{2+x} = \frac{4}{4-x^2} \quad b) \frac{x+3}{(x-3)^2} = \frac{2}{x+3} - \frac{x}{x^2-9}$$

$$144) \quad \frac{3x+1}{4x-10} - \frac{7x+5}{10x-25} = \frac{8}{5} - \frac{5x-1}{6x-15}$$

- 145) Jemand benötigt 36 kg 20%ige Salzlösung. Es stehen zum Mischen zwei Salzlösungen zur Verfügung, die 15%ige bzw. 24%ige Konzentration aufweisen. Welche Mengen der vorhandenen Salzlösungen sind für die Mischung erforderlich?
- 146) Die Einerziffer einer dreistelligen Zahl ist 7. Die Hunderterstelle hat den 3-fachen Wert der Zehnerstelle. Werden Einer- und Hunderterziffer vertauscht, erhält man eine um 198 kleinere Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?
- 147) In einer Klasse befinden sich 36 Kinder. Das Doppelte der Zahl der Mädchen ist um 8 kleiner als das Dreifache der Zahl der Buben. Berechne die Anzahl der Mädchen und Buben!
- 148) Ein LKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 40 km/h um 9 Uhr von Ort A nach dem 75 km entfernten Ort B ab. Eine halbe Stunde später fährt ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h von B in Richtung A ab. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A begegnet der PKW dem LKW?

Hebe heraus oder führe die Formel aus:

- 149) $8xy^3 + 12x^2y^3$ b) $(\frac{1}{2}s - 2t)^2$ c) $49u^2 - 121v^4$
- 150) Die Zehnerstelle einer Zahl hat einen um 7 kleineren Wert als die Einer-stelle. Vertauscht man beide, ist die entstehende Zahl um 5 größer als das 3-fache der ursprünglichen Zahl. Welche Zahl erfüllt diese Bedingung?
- 151) Wie viel kg einer 22%igen Salzlösung sind zu 6 kg einer 15%igen Salzlösung hinzuzufügen, um eine 19%ige Salzlösung zu erhalten?
- 152) Ein LKW, der 50 km in der Stunde zurücklegt, verlässt den Ort A um halb neun Uhr. Um 10 Uhr folgt ihm ein PKW mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A hat der PKW den LKW eingeholt?
- 153) Wie viel Prozent Alkoholgehalt hat die Mischung von 200 l 86%igem Alkohol und 500 l 37%igem Alkohol?
- 154) Wie viel Liter Wasser sind zu 150 l 84%igem Alkohol hinzuzufügen, um 60%igen Alkohol zu erhalten?
- 155) Jemand hat 10 kg 30%iger Salzlösung und beabsichtigt, durch Mischung einer anderen Salzlösung 35 kg 20%ige Sole herzustellen. Welche Konzentration muss die zum Mischen verwendete zweite Lösung aufweisen?

Löse folgende Beispiele über der Grundmenge Q ! Definitionsmenge!

156) a) $\frac{x+4}{2x-1} = \frac{x-3}{2x+5}$ b) $\frac{x}{x-4} - \frac{x}{x+4} = 0$

157) $\frac{7x+3}{3x-3} - \frac{7x^2+2}{3x^2-3} = \frac{20x+44}{6x(x+1)}$

[Lösungen: 128)a) $D=\mathbb{Q} \setminus \{0,9\}$, $L=\{\}$ b) $L=\{1\}$ 129) $L=\{-6/5\}$ 130)a) $L=\{2\}$ b) $L=\{\}$ 131) $L=\{-9\}$

132) $L=\{2\}$ 133)a) $D=Q\setminus\{0,2\}$, $L=\{9/2\}$ b) $D=Q\setminus\{-2,+2\}$, $L=\{-4/3\}$ 134) $D=Q\setminus\{0,3\}$, $L=\{6/5\}$ 135) 60 136) 33 bzw. 11 137) 43m bzw 37m 138) $L=\{2\}$ 139) $L=\{8\}$ 140) 15 141)a) $d=2M/\pi s$ b) $d=\sqrt{12V/\pi h}$ 142)a) $s=O/r\pi - r$ 143)a) $D=Q\setminus\{-2,+2\}$, $L=\{1/2\}$ b) $D=Q\setminus\{-3,+3\}$, $L=\{3/5\}$ 144) $D=Q\setminus\{5/2\}$, $L=\{5\}$ 145) 16 bzw 20 kg 146) 937 147) 20 M, 16 B 148) 10h, 40 km 149) Binom. Lehrsatz u. Zerlegung, Faktorisieren 150) 29 151) 8kg 152) 12h30, 200km 153) 51% 154) 60 l 155) 16% 156)a) $D=Q\setminus\{-5/2,1/2\}$, $L=\{-\frac{17}{20}\}$ b) $D=Q\setminus\{-4,+4\}$, $L=\{0\}$ 157) $D=Q\setminus\{-1,0,+1\}$, $L=\{2\}$

Übungsblatt 8: Lineare Gleichungen mit Textaufgaben

158) Forme folgende Formeln um:

a) $P = \frac{B \cdot p}{100}$ $B = ?$ b) $h_a = \frac{b \cdot h_b}{a}$ $a = ?$

159) Löse folgende Gleichung in $G = Q$

$$\frac{x+2}{2x-1} - \frac{x-1}{4x-2} = \frac{x+7}{20x-10} + \frac{9}{20}$$

160) Vereinfache: $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 9} \cdot \frac{(x-3)^2}{x^2 - 4x + 4}$

161) An einer Straße liegen die Orte A; B und C, wobei A von B 25 km und B von C 100 km entfernt sind. Um 8 Uhr verlässt ein Mopedfahrer den Ort B mit einer Geschwindigkeit von 38 km/h in Richtung C. Um 9 Uhr fährt ein PKW-Fahrer mit einer Geschwindigkeit von 80 km/h vom Ort A in Richtung C ab. Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von C holt der PKW-Fahrer den Mopedfahrer ein?

162) Ein Fußgänger, der 4 km in einer Stunde zurücklegt, geht um 8 Uhr vom Ort A nach dem 40 km entfernten Ort B ab. Um 9 Uhr verlässt ein Radfahrer den Ort B in Richtung A mit einer Geschwindigkeit von 16 km/h.

- a) Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A begegnet der Fußgänger dem Radfahrer?
b) Um wie viel Uhr und in welcher Entfernung von A würde der Radfahrer den Fußgänger einholen, wenn er wie der Fußgänger die Strecke von A nach B zurücklegt?

163) Jemand hat 1200 l 12%-igen Alkohol und beabsichtigt, 1800 l 36%-igen Alkohol herzustellen. Welchen Alkoholgehalt muss die zum Mischen verwendete Flüssigkeit haben?

164) Wie viel Prozent Salzgehalt hat die Mischung von 50 kg 20%-iger und 350 kg 4%-iger Salzlösung?

165) 60 000.- Euro sollen unter drei Preisträgern derart verteilt werden, dass auf den zweiten Preis $\frac{2}{3}$ des ersten Preises und auf den dritten Preis die Hälfte des zweiten Preises entfallen. Welche Beträge entfallen auf die drei Preise?

Übungsblatt 9: Ungleichungen

Ermittle in folgenden Aufgaben die Lösungsmenge:

1.) a.) $x + 11 < 13$, $G = \mathbb{N}$

b.) $x + 3 < 20$, $G = \mathbb{P}$

2.) a.) $x - 5 < 5$, $G = \mathbb{N}_g$

b.) $-9 > x + 7$, $G = \mathbb{N}_u$

3.) a.) $3x - 8 < 2x + 10$, $G = \mathbb{P}$

b.) $19x - 19 < 7(x - 1)$, $G = \mathbb{N}$

4.) a.) $15x - 41 < -2x + 27$, $G = \mathbb{Z}$

b.) $48x - 11 < 5x + 3$, $G = \mathbb{P}$

5.) a.) $2(x - 1) < \frac{5x - 2}{3}$, $G = \mathbb{N}_g$

b.) $9(x - 3) > \frac{7x + 4}{3}$, $G = \mathbb{P}$

6.) a.) $5(x - 10) < \frac{10x + 5}{7} + 38$, $G = \mathbb{P}$

b.) $4(2x - 28) \geq \frac{29x - 2}{2}$, $G = \mathbb{Z}$

7.) a.) $\frac{x+3}{4} - 2 < \frac{2x+1}{7} - \frac{x-5}{8}$, $G = \mathbb{P}$

b.) $\frac{2x+1}{5} - 4 \geq \frac{x-4}{3} - \frac{3x-1}{8}$, $G = \mathbb{N}_u$

8.) a.) $\frac{4x-3}{2} + 4 \geq \frac{5x-3}{10} - \frac{-3x+4}{3}$, $G = \mathbb{Z}$

b.) $\frac{13x-7}{9} < \frac{5x+2}{3} - \frac{-x-1}{7} + 7$, $G = \mathbb{Q}$

Lösungen:

1.) a.) $L = \{0; 1\}$ b.) $L = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 2.) a.) $L = \{2, 4, 6, 8\}$ b.) $L = \{\}$ 3.) a.) $L = \{2, 3, 5, \dots, 17\}$ b.) $L = \{\}$

4.) a.) $L = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$ b.) $L = \{\}$ 5.) a.) $L = \{2\}$ b.) $L = \{5, 7, 11, 13, \dots\}$ 6.) a.) $L = \{2, 3, 5, \dots, 23\}$

b.) $L = \{\dots, -20, -19, -18\}$ 7.) a.) $L = \{2, 3, 5, \dots, 19\}$ b.) $L = \{7, 9, 11, \dots\}$ 8.) a.) $L = \{-7, -6, -5, \dots\}$

b.) $L = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > -\frac{541}{23}\}$

E. Quadratische Gleichungen

Eine Gleichung der Form

$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$

heißt **quadratische Gleichung**.

Bei einer quadratischen Gleichung kommt die Variable x mindestens einmal in der 2. Potenz vor, aber in keiner höheren Potenz.

$$\underbrace{a \cdot x^2}_{\text{Quadratisches Glied}} + \underbrace{b \cdot x}_{\text{Lineares Glied}} + \underbrace{c}_{\text{Konstantes Glied}} = 0$$

- x ist die unbekannte Variable
- $a \in \mathbb{R}^*$ (d.h. $a \neq 0$)
- $b, c \in \mathbb{R}$

a, b, c nennt man auch **Koeffizienten**!

Bsp.: $x^2 - 2x + 4 = 0$; $3x^2 + 5x - 6 = 0$; $4x^2 - 9 = 0$; $5x^2 - 25x = 0$; usw.

Ordnen Sie bei den einzelnen Gleichungen den Koeffizienten a, b, c ihre Zahlenwert zu!

1. Lösen von reinquadratischen Gleichungen ($ax^2 + c = 0$)

Allgemein:	Beispiele:
$ax^2 + c = 0$ -c Äquivalenzumformung $ax^2 = -c$:a Äquivalenzumformung $x^2 = -\frac{c}{a}$ $\pm \sqrt{\quad}$ „Wurzelziehen“ $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ 2 Lösungen x_1 und x_2 ! Lösungsmenge: $L = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}; +\sqrt{-\frac{c}{a}} \right\}$ Zusammenfassung: Typ A ($ax^2 + c = 0$) löst man durch Umformung auf $x^2 = \square$ und „Wurzelziehen“ zu 2 Lösungen x_1 und x_2 !	1: $4x^2 - 16 = 0$:4 $x^2 - 4 = 0$ +4 $x^2 = 4$ $\pm \sqrt{\quad}$ $x_{1,2} = \pm 2$ $x_1 = -2$ $x_2 = 2$ d.h. $\frac{L = \{-2; 2\}}{2}$ reelle Lösungen! 2: $3x^2 + 27 = 0$:3 $x^2 + 9 = 0$ -9 $x^2 = -9$ $\pm \sqrt{\quad}$ $x_{1,2} = \pm \sqrt{-9} = \text{Error}$ $L = \{ \}$ (= Leere Menge!) d.h. keine reelle Lösungen! Anm.: Die quadratische Wurzel ist nicht für negative Zahlen definiert!

Reinquadratische Gleichungen haben entweder 2 reelle Lösungen oder gar keine reelle Lösung!

Allgemein: Quadratische Gleichungen haben in der Grundmenge $G = \mathbb{R}$ **höchstens zwei Lösungen**. Es kann aber auch sein, dass sie nur eine oder sogar keine Lösung besitzen.

2. Lösen von gemischtquadratischen Gleichungen

$$(ax^2 + bx = 0)$$

Allgemein:	Beispiele:
$ax^2 + bx = 0$ Herausheben des gemeinsamen Faktors x $x(ax + b) = 0$ Eine Summe wird damit in ein Produkt übergeführt(faktoriert)! Die Frage: Wann ist ein Produkt NULL? Führt zu den Lösungen! 1. Lösung: Erster Faktor gleich 0! $x = 0$ bzw. $x_1 = 0$ 2. Lösung: Zweiter Faktor gleich 0! $ax + b = 0$ $-b$ $ax = -b$ $:a$ $x_2 = -\frac{b}{a}$ Lösungsmenge: $L = \{0; -\frac{b}{a}\}$ <u>Zusammenfassung:</u> Typ B ($ax^2 + bx = 0$) löst man durch Herausheben von x zu $x(ax+b)=0$ und der Anwendung des Satzes zum Nullprodukt (Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.)!	<u>1:</u> $3x^2 + 9x = 0$ $:3$ $x^2 + 3x = 0$ x Herausheben $x \cdot (x+3) = 0$ Ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist 1. Lösung: $x = 0$ oder $x_1 = 0$ und 2. Lösung: $x+3 = 0$ -3 $x_2 = -3$ $L = \{-3; 0\}$ d.h. 2 reelle Lösungen! <u>2:</u> $4x^2 - 18x = 0$ $:2$ $2x^2 - 9x = 0$ x Herausheben $x \cdot (2x-9) = 0$ Ein Produkt ist dann Null, wenn ein Faktor Null ist 1. Lösung: $x = 0$ oder $x_1 = 0$ und 2. Lösung: $2x-9 = 0$ $+9$ $2x = 9$ $:2$ $x_2 = \frac{9}{2}$ $L = \{0; \frac{9}{2}\}$ d.h. 2 reelle Lösungen!

Gemischtquadratische Gleichungen haben immer 2 reelle Lösungen, eine davon ist immer Null!

Beispiele: Lösen Sie die folgenden Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$!

1.)	2.)	
a) $5x^2 - 80 = 0$	a) $(4x - 3)(3x - 2) = (2x - 13)(x - 2) + 20$	Lsg.: 1.) a) $\{-4, 4\}$; b) $\{ \}$; c) $\{-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$; d) $\{-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$; e) $\{0, 9\}$; f) $\{-10, 0\}$; g) $\{-\frac{1}{4}, 0\}$;
b) $3x^2 + 75 = 0$	b) $(x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = (x + 1)^2 + 97$	
c) $4x^2 - 9 = 0$	c) $(5x + 2)(x - 3) - (2x + 3)(x - 2) = 0$	2.) a) $\{-2, 2\}$; b) $\{-4, 4\}$; c) $\{0, 4\}$; d) $\{0, -3, 5\}$
d) $50x^2 - 2 = 0$	d) $(x - 2)^2 - (2x + 3)^2 = (x - 1)^2 - 6$	
e) $x^2 - 9x = 0$		
f) $5x^2 + 50x = 0$		
g) $12x^2 + 3x = 0$		

3. Lösen von allgemeinen quadratischen Gleichungen

$$(ax^2 + bx + c = 0)$$

Allgemein: Herleitung der Lösungsformel	Beispiel:
$ax^2 + bx + c = 0$ durch a dividieren $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ Umformen $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$ „quadratische Ergänzung“ $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ Binom $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ $\pm \sqrt{\quad}$ „Wurzelziehen“ $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ oder Die große Lösungsformel für die allgemeine quadratische Gleichung: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	<u>1:</u> $x^2 - 2x = 24$ 1. Schritt: Alle Glieder auf eine Seite bringen! $x^2 - 2x - 24 = 0$ 2. Schritt: Die Koeffizientenwerte aus der Gleichung ablesen! $\Rightarrow a=1, b=-2, c=-24$ 3. Schritt: Einsetzen in die quadratische Lösungsformel: (Auf Vorzeichen achten!!!) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Führt zum numerischen Berechnen der Lösungen x_1 und x_2 : $x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-24)}}{2 \cdot 1}$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{2} \quad \sqrt{100} = 10$ $x_{1,2} = \frac{2 \pm 10}{2}$ $x_1 = \frac{2 + 10}{2} = \frac{12}{2} = 6$ $x_2 = \frac{2 - 10}{2} = \frac{-8}{2} = -4$ $\underline{L = \{-4; 6\}}$ d.h. 2 reelle Lösungen! Anm.: Die quadratische Wurzel ist nicht für negative Zahlen definiert!

Die Diskriminante D

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Der Ausdruck unter der Wurzel in der quadratischen Lösungsformel, also $b^2 - 4ac$, wird mit D bezeichnet und heißt **Diskriminante**. Von dem errechneten Wert für $D = b^2 - 4ac$ kann man die Anzahl der Lösungen bei einer quadratischen Gleichung ablesen:

1. $D > 0$ (*Diskriminante positiv*) bedeutet: Die quadratische Gleichung besitzt **zwei** reelle Lösungen.
2. $D = 0$ (*Diskriminante Null*) bedeutet: Die quadratische Gleichung besitzt nur **eine** reelle Lösung.
3. $D < 0$ (*Diskriminante negativ*) bedeutet: Die quadratische Gleichung besitzt **keine** reelle Lösungen.

Weitere Beispiele:

$$8x^2 - 7x - 1 = 0$$

$$L = \{-1/8, 1\}$$

$$20x^2 = 8x + 9$$

$$L = \{-1/2, 9/10\}$$

4. Lösen von quadratischen Gleichungen in Normalform

$$(x^2 + px + q = 0): \quad (a=1!)$$

Allgemein:	Beispiel:
Allgemeine quadratische Gleichung lautet: $ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{ durch } a \text{ dividieren}$ $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \quad \text{ Ersetze } \frac{b}{a} = p$ und $\frac{c}{a} = q$, dies ergibt $x^2 + px + q = 0$ (Merkmal: $a=1!$) die quadratische Gleichung in Normalform. Die kleine Lösungsformel für die Normalform einer quadratischen Gleichung: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	<u>1:</u> $x^2 - 8x = -15$ 1. Schritt: Alle Glieder auf eine Seite bringen! $x^2 - 8x + 15 = 0$ 2. Schritt: Die Koeffizientenwerte aus der Gleichung ablesen! $\Rightarrow p = -8, q = 15$ 3. Schritt: Einsetzen in die quadratische Lösungsformel: (Auf Vorzeichen achten!!!) $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $x_{1,2} = -\frac{(-8)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-8}{2}\right)^2 - 15}$ $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15} \quad \sqrt{1} = 1$ $x_{1,2} = 4 \pm 1 \rightarrow x_1 = 5 \text{ und } x_2 = 3$ $L = \{3; 5\}$

Weitere Beispiele:

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$L = \{2, 6\}$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$L = \{1, 2\}$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$L = \{-1, 5\}$$

$$x^2 - 2x - 35 = 0$$

$$L = \{-5, 7\}$$

5. SATZ von Vieta

Hat die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ zwei verschiedene Lösungen x_1 und x_2 , so gilt:

- 1) $x_1 + x_2 = -p$
- 2) $x_1 \cdot x_2 = q$
- 3) $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + px + q$

Die Bedeutung dieses Satzes besteht vor allem darin, dass man mit seiner Hilfe ein quadratisches Polynom(=quadratische Gleichung) in **Linearfaktoren** $(x - x_i)$ zerlegen kann, wenn die entsprechende Gleichung zwei reelle Lösungen (oder eine Doppellösung) hat.

Beispiel: Wie lautet die quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge $L = \{-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\}$?

2 Möglichkeiten:

Erste Variante: $x_1 + x_2 = -p \Rightarrow -(x_1 + x_2) = p \Rightarrow -(-\frac{2}{3} + \frac{3}{2}) = p \Rightarrow \underline{p = -\frac{5}{6}}$

$$x_1 \cdot x_2 = q \Rightarrow -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = q \Rightarrow \underline{q = -1}$$

$\Rightarrow$ Gleichung: $x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$ oder $6x^2 - 5x - 6 = 0$

Zweite Variante: $(x - (-\frac{2}{3}))(x - \frac{3}{2}) = x^2 - \frac{5}{6}x - 1 = 0$ oder $6x^2 - 5x - 6 = 0$

Übungsblatt 10: Quadratische Gleichungen

65) Bestimme die Definitionsmenge und berechne über $G = \mathbb{Q}$!

a) $\frac{x-2}{x+2} = \frac{2x-7}{3x-8}$

b) $\frac{x+2}{2x-1} - \frac{1-3x}{2x+3} = \frac{8x^2+2x+7}{(2x-1) \cdot (2x+3)}$

c) $\frac{2x-4}{(x+3)^2} + \frac{1}{x-3} = \frac{2x+1}{x^2-9}$

66) Löse die folgenden Gleichungen über $\mathbb{R}$ und mache die Probe!

a) $(2x-3)^2 + (2x-4)^2 = 4(x-1)^2$

b) $4(x-1)(x-2) - (3-2x)(2x-1) = 39$

67) Berechne für $G = \mathbb{Q}$!

a) $4x^2 - 7x = 2$

b) $12x^2 = 7 - 25x$

c) $9x^2 = 26x + 3$

68) Wie lautet die Gleichung 2. Grades (andere Formulierung für quadratische Gleichung) mit der angegebenen Lösungsmenge L ?

a) $L = \{-7, 5\}$

b) $L = \{-2, \frac{2}{3}\}$

c) $L = \{-8, -3\}$

69) Von einer quadratischen Gleichung kennt man eine Lösung; suche die zweite Lösung für $G = \mathbb{R}$!

a) $2x^2 + 9x - 18 = 0$

$x_1 = -6$

b) $x^2 + 7x - 18 = 0$

$x_1 = 2$

c) $3x^2 - 11x - 20 = 0$

$x_1 = 5$

d) $6x^2 - x - 35 = 0$ $x_1 = \frac{5}{2}$

e) $3x^2 - 16x - 12 = 0$

$x_1 = 6$

f) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ $x_1 = -3$

70) Berechne folgende quadratische Gleichungen in der Grundmenge $\mathbb{R}$ und mache die Probe!

a) $x^2 - 4x - 21 = 0$

b) $x^2 + 6x + 9 = 0$

c) $2x^2 + 7x - 30 = 0$

d) $x^2 - x + 11 = 0$

e) $x^2 - x - 12 = 0$

f) $2x^2 + 14x + 12 = 0$

71) Löse folgende quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 + 12x = 0$

b) $\frac{x^2}{3} - 2x = 0$

c) $36x^2 - 25 = 0$

d) $17x^2 + 3 = 0$

72) Weitere quadratische Gleichungen:

a) $(4+3x)(2-x) + (4-3x)(2+x) = 22$

b) $(8x + 5)^2 + (8x-5)^2 = 4658$

[Lösungen: 65)a) $D=\mathbb{R} \setminus \{-2, \frac{8}{3}\}$; $L=\{5, 6\}$ **b)** $D=\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}$; $L=D$ **c)** $D=\mathbb{Q} \setminus \{-3, 3\}$ $L=\{2, 9\}$ **66)a)** $L=\{\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\}$ **b)** $L=\{-1, \frac{7}{2}\}$ **67)a)** $L=\{-\frac{1}{4}, 2\}$ **b)** $L=\{-\frac{7}{3}, \frac{1}{4}\}$ **c)** $L=\{-\frac{1}{9}, 3\}$ **68)a)** $x^2+2x-35=0$ **b)** $3x^2+4x-4=0$ **c)** $x^2+11x+24=0$ **69)a)** $x_2=\frac{3}{2}$ **b)** $x_2=-9$ **c)** $x_2=-\frac{4}{3}$ **d)** $x_2=-\frac{7}{3}$ **e)** $x_2=-\frac{2}{3}$ **f)** $x_2=\frac{1}{2}$ **70)a)** $L=\{-3, 7\}$ **b)** $L=\{-3\}$ **c)** $L=\{-6, \frac{5}{2}\}$ **d)** $L=\{\}$ **e)** $L=\{-3, 4\}$ **f)** $L=\{-6, -1\}$ **71)a)** $x_1=0$ und $x_2=-4$ **b)** $x_1=0$ und $x_2=6$ **c)** $x_1=\frac{5}{6}$ und $x_2=-\frac{5}{6}$ **d)** $\{\}$ **72)a)** $\{\}$ **b)** $\{6; -6\}$

F. Algebraische Gleichungen höheren Grades

1. Gleichungen 3. Grades

Eine Gleichung der Form $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

heißt *kubische Gleichung* bzw. *Gleichung 3. Grades*.

Die allgemeine Lösungsformel für kubische Gleichungen ist sehr kompliziert und wird daher in der Praxis kaum benutzt. In einigen Fällen können wir aber eine Gleichung 3. Grades auf eine quadratische Gleichung zurückführen.

Umformen: $ax^3 + d = 0$

$$x^3 - 8 = 0 \quad | + 8 \quad x^3 + 125 = 0 \quad | -125$$

$$x^3 = 8 \quad x^3 = -125$$

$$x = \sqrt[3]{8} \quad x = \sqrt[3]{-125}$$

$$x = 2 \quad x = -5$$

(Da die 3. Potenz einer negativen Zahl negativ ist, ist die Lösung hier eindeutig!)

HERAUSHEBEN: $ax^3 + bx^2 + cx = 0$

$$x^3 - 5x^2 + 6x = 0$$

$$x(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 5x + 6 = 0$$

Wir haben die Gleichung in eine lineare und eine quadratische Gleichung aufgespalten. (Man sagt auch, wir haben den Linearfaktor x abgespalten.) Diese können wir schon lösen und erhalten $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$

SATZ von Vietá: Eine Lösung ist bekannt (aus der Angabe oder durch Probieren)

Der Satz von Vieta gilt auch für Gleichungen höheren Grades. Hat also eine kubische Gleichung die Lösungen x_1 , x_2 und x_3 , so ist

$$x^3 + px^2 + qx + r = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Kennen wir zum Beispiel die Lösung x_1 , so können wir die linke Seite der Gleichung durch $(x - x_1)$ dividieren (den Linearfaktor $(x - x_1)$ abspalten) und erhalten eine quadratische Gleichung.

Wenn überhaupt eine ganzzahlige Lösung existiert, muss sie ein Teiler des absoluten Glieds r sein.

Bsp.: $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$

Mögliche (ganzzahlige) Lösungen: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ Durch Probieren findet man $x_1 = 2$

$$(x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0) : (x - 2) = x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = -1, x_3 = 3$$

Ebenso kann man Gleichungen höheren Grades lösen, indem man einen Linearfaktor nach dem anderen abspaltet.

2. Biquadratische Gleichungen: Substitution

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

Ein Sonderfall der Gleichungen 4. Grades: Es kommen nur x^4 , x^2 und ein konstantes Glied vor.

Wenn man $x^2 = t$ setzt, erhält man eine quadratische Gleichung.

Beispiel:

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

$$x^2 = t: \quad t^2 - 10t + 9 = 0$$

$$x^2 = t_1 = 1 \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm 1$$

$$x^2 = t_2 = 9 \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm 3$$

(Analog rechnet man, wenn z.B. nur x^6 und x^3 vorkommen.)

Übungsblatt 11: Algebraische Gleichungen höheren Grades

Lösen Sie die folgenden Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$!

1. a) $x^3 = 64$ b) $x^3 = -125$ c) $8x^3 - 27 = 0$
d) $5x^3 + 2,56 = 0$ e) $x^4 = 625$ f) $x^4 = -16$
g) $3x^4 + 243 = 0$ h) $80x^4 - 5 = 0$
2. a) $x^3 - 10x^2 + 16x = 0$ b) $x^3 + 9x^2 + 14x = 0$ c) $x^3 - 6x^2 + 9x = 0$
d) $x^3 + 4x^2 + 6x = 0$ e) $x^3 - 3x^2 = 0$ f) $4x^3 + x^2 = 0$
g) $2x^3 + 9x^2 - 5x = 0$ h) $5x^3 - 3x^2 + 2x = 0$
3. a) $x^3 - 3x^2 - 6x + 8 = 0$ b) $x^3 - 7x^2 + 7x + 15 = 0$ c) $x^3 - x^2 - 16x - 20 = 0$
d) $x^3 + 2x^2 + 9x + 18 = 0$ e) $x^3 - 7x + 6 = 0$ f) $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$
g) $4x^3 - 15x^2 + 12x + 4 = 0$ h) $5x^3 - 12x^2 + 5x - 2 = 0$
4. a) $x^3 + 12 = 3x^2 + 4x$ b) $x^3 + 2x = 2x^2 + 15$ c) $x^3 + x^2 = 10x - 8$
d) $3(x^3 + 1) = 7x(x + 1)$ e) $x^2(x - 2) = (x - 3)(x + 2) + 1$
f) $x(x - 4)^2 + x = 10$ g) $x(x - 1)(x - 5) + 12 = 0$ h) $(x + 2)(x - 3)(x - 5) = 24$
5. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ b) $x^4 - 20x^2 + 64 = 0$ c) $x^4 - 7x^2 + 10 = 0$
d) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ e) $x^4 + 7x^2 + 12 = 0$ f) $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$
g) $x^6 - 28x^3 + 27 = 0$

Lösungen

1. a) $\{4\}$ b) $\{-5\}$ c) $\{3/2\}$ d) $\{-0,8\}$ e) $\{\pm 5\}$ f) $\{\}$ g) $\{\}$ h) $\{\pm 1/2\}$
2. a) $\{0, 2, 8\}$ b) $\{-7, -2, 0\}$ c) $\{0, 3(2)\}$ d) $\{0\}$ e) $\{0(2), 3\}$ f) $\{-1/4, 0(2)\}$ g) $\{-5, 0, .\}$ h) $\{0\}$
3. a) $\{-2, 1, 4\}$ b) $\{-1, 3, 5\}$ c) $\{-2(2), 5\}$ d) $\{-2\}$ e) $\{-3, 1, 2\}$ f) $\{-1, 2(2)\}$ g) $\{-., 2(2)\}$ h) $\{2\}$
4. a) $\{-2, 2, 3\}$ b) $\{3\}$ c) $\{-4, 1, 2\}$ d) $\{-1, \frac{1}{3}, 3\}$ e) $\{-1\}$ f) $\{1, 2, 5\}$ g) $\{-1, 3, 4\}$ h) $\{-1, 1, 6\}$
5. a) $\{-2, -1, 1, 2\}$ b) $\{-4, -2, 2, 4\}$ c) $\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{5}\}$ d) $\{-3, , 3\}$ e) $\{\}$ f) $\{-2, 2\}$ g) $\{1, 3\}$ h) $\{-1, 2\}$

G. Wurzel und Wurzelgleichungen

1. Rechnen mit der Rechenoperation „Wurzel ziehen“

Die Wurzel wird in eine Potenz umgeschrieben. Dann kann man mit den Potenzrechenregeln weiterrechnen.

$$\text{Wurzel} = \overset{\text{Wurzel exponent}}{\sqrt[n]{\text{Radikand}}}$$

$$\text{Regel: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Partielles (=teilweise) Wurzelziehen:

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{3 \cdot 8} = \sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = 2\sqrt[3]{3}$$

Unter die Wurzel bringen:

$$3 \cdot \sqrt[2]{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$$

Multiplizieren von Wurzeln:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = a^{\frac{5}{10} + \frac{4}{10}} = a^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{a^9}$$

Dividieren von Wurzeln:

$$\sqrt{x} : \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = x^{\frac{2}{4} - \frac{3}{4}} = x^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Wurzel aus einer Wurzel ziehen:

$$\sqrt[4]{\sqrt{a^3}} = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 4}} = a^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{a^3}$$

2. Wurzelgleichungen

Definition: Eine Gleichung, in der die Variable mindestens einmal im Radikanden einer Wurzel (Ausdruck unter der Wurzel) auftritt, heißt **Wurzelgleichung**.

1. Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x+6} = 3$ in $\mathbb{R}$!

Lösung: $\sqrt{x+6} = 3$ /Gleichung quadrieren!

$$x+6 = 9$$

$$\underline{x=3}$$

Probe: $\sqrt{9} = 3$

$$3 = 3 \quad \text{wahre Aussage!}$$

Lösungsmenge: $L=\{3\}$.

2. Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $\sqrt{x+9} + 5 = 0$ in $\mathbb{Q}$!

Lösung: $\sqrt{x+9} + 5 = 0$ /Wurzel isolieren!

$$\sqrt{x+9} = -5 \quad \text{/Quadrieren!}$$

$$x+9 = 25$$

$$\underline{x=16}$$

Probe: $\sqrt{25} + 5 = 0$

$$10 = 0 \quad \text{falsche Aussage!}$$

d.h. die gefundene Lösung $x=16$ erfüllt die vorgegebene Wurzelgleichung nicht!

Lösungsmenge: $L=\{ \}$.

3. Beispiel: Lösen Sie die Gleichung

$$\sqrt{4x+9} = \sqrt{x} + \sqrt{x+5} \quad \text{in } \mathbb{Q}!$$

Lösung:

$$\sqrt{4x+9} = \sqrt{x} + \sqrt{x+5} \quad \text{/Quadrieren!}$$

Achtung Summe! Verwenden Sie die binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$!

$$4x+9 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{x+5} + x+5 \quad \text{/Wurzel isolieren!}$$

$$2x+4 = 2\sqrt{x(x+5)} \quad \text{/:2}$$

$$x+2 = \sqrt{x^2+5x} \quad \text{/Quadrieren!}$$

Bei der Summe die binomische Formel nicht vergessen!

$$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x$$

$$-x = -4 \quad \text{/*(-1)}$$

$$\underline{x = 4}$$

Probe: $\sqrt{25} = \sqrt{4} + \sqrt{9}$

$$5 = 2 + 3$$

$$5 = 5 \quad \text{wahre Aussage!}$$

Lösungsmenge: $L=\{4\}$.

Definitionsmenge:

Bei Wurzelgleichungen muss auch noch die Definitionsmenge bestimmt werden, da der **Wurzelradikand nicht negativ** sein darf!

$$4x+9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{9}{4}$$

$$x \geq 0$$

$$x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$$

$$\Rightarrow D_f = \{x/x \in \mathbb{Q} \wedge x \geq 0\}$$

Übungsbeispiele:

W1.) a) $\sqrt{2x} = 8$ b) $\sqrt{6x} - 5 = 1$ c) $4\sqrt{3x} - 11 = 1$

W2.) a) $\sqrt{x-2} = 1$ b) $20 = \sqrt{15-x}$

c) $4\sqrt{x+3} - 15 = 5$

W3.) a) $5\sqrt{3x+1} = 3\sqrt{5x+25}$

b) $4\sqrt{4x+1} = 3\sqrt{7x+2}$

W4.) a) $5\sqrt{x} - 1 = 7\sqrt{x} - 5$ b) $7\sqrt{x} + 9 = 6(3\sqrt{x} - 4)$

W5.) a) $\sqrt{x+3} - \sqrt{x} = 1$ b)

$$\sqrt{x+14} + \sqrt{x+7} = 7$$

W6.) a) $\sqrt{x+9} - \sqrt{x-4} = 1$ b) $\sqrt{x-5} + \sqrt{x+16} = 7$

W7.) a) $\sqrt{5x-9} - \sqrt{5x+11} = -2$

b) $\sqrt{5x+11} - \sqrt{5x+4} = 1$

L: W1.) a) $\{32\}$, b) $\{6\}$, c) $\{3\}$; W2.) a) $\{3\}$, b) $\{-385\}$, c) $\{22\}$;

W3.) a) $\{20/3\}$, b) $\{2\}$; W4.) a) $\{4\}$, b) $\{9\}$; W5.) a) $\{1\}$, b)

$\{2\}$; W6.) a) $\{40\}$, b) $\{9\}$; W7.) a) $\{5\}$, b) $\{1\}$.

H. Exponentialgleichungen und logarithmische Gleichungen

1. Was ist der Logarithmus?

Im Beispiel

$$3^x = 5$$

stellt sich die Frage, **wie groß das x ist?** Wie oft muss ich 3 mit sich selbst multiplizieren, damit 5 herauskommt?

Mit dem Taschenrechner:

Der Wert muss zwischen 1 und 2 liegen!

Weitere Eingrenzung: $1,4 < x < 1,5$

$$1,42 < x < 1,48$$

Probieren ist mühsam => Berechnung ist notwendig:

Def.: Logarithmus

Jene Zahl $x \in \mathbb{R}$, für die $a^x = b$ gilt, $(a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}, b \in \mathbb{R}^+)$

heißt Logarithmus von b zur Basis a:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = {}^a\log b$$

Der Logarithmus einer Zahl b zur Basis a ist also jene Zahl x, mit der man a potenzieren muss, um b zu erhalten.

a		Basis
b		Numerus
x		Logarithmus

Den Logarithmus bestimmen heißt also eigentlich nichts anderes, als die Hochzahl zu bestimmen!!!!

Bsp.:

$$3^x = 9 \quad x = ?$$

$$3^x = 9 \Leftrightarrow {}^3\log 9 = x \quad {}^3\log 9 = 2, \text{ weil } 3^2 = 9 \text{ ist!}$$

$$\text{Bsp.: } 4^x = 64 \Leftrightarrow {}^4\log 64 = x \quad {}^4\log 64 = 3, \text{ weil } 4^3 = 64 \text{ ist!}$$

$$\text{Bsp.: } {}^3\log 1/9 = -2, \text{ weil } 3^{-2} = 1/9$$

$$\text{Bsp.: } {}^{0,5}\log 1/32 = 5, \text{ weil } (1/2)^5 = 1/32$$

Der Logarithmus zur **Basis 10** heißt

dekadischer Logarithmus (Schreibweise: **lg**)

Der Logarithmus zur **Basis e** heißt

natürlicher Logarithmus, logarithmus naturalis

(Schreibweise: **ln**)

Diese beiden Logarithmen sind auch am Taschenrechner vorhanden, alle anderen nicht.

Um trotzdem rechnen zu können, gibt es folgende Regel, mit der man zwischen den verschiedenen Basen umrechnen kann:

$${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a}$$

mit a, b, c aus $\mathbb{R}^+$, $a, b \neq 1$

Bsp.:

$${}^3\log 10 = \frac{{}^{10}\log 10}{{}^{10}\log 3}$$

Rechengesetze für Logarithmen

i. ${}^a\log a = 1$, weil $a^1 = a$ ist.

$$\text{Bsp.: } {}^3\log 3 = 1$$

ii. ${}^a\log 1 = 0$, weil $a^0 = 1$ ist.

$$\text{Bsp.: } {}^5\log 1 = 0$$

iii. ${}^a\log a^n = n$, weil $a^n = a^n$ ist.

$$\text{Bsp.: } {}^2\log 8 = 3$$

iv. ${}^a\log(u \cdot v) = {}^a\log u + {}^a\log v$

$$\text{Bsp.: } {}^3\log(5 \cdot 6) = {}^3\log 5 + {}^3\log 6$$

v. ${}^a\log(u/v) = {}^a\log u - {}^a\log v$

$$\text{Bsp.: } \lg 0,01 = \lg(1/100) = \lg 1 - \lg 100 = 0 - 2 = -2$$

vi. ${}^a\log u^r = r \cdot {}^a\log u$

$$\text{Bsp.: } {}^5\log 3^4 = 4 \cdot {}^5\log 3$$

12. Übungsblatt: Logarithmus, Logarithmensätze

17.) Berechnen Sie den Logarithmus:

a) ${}^4\log 64 =$

b) ${}^2\log \sqrt{2} =$

c) ${}^2\log 32 =$

d) ${}^4\log \sqrt[3]{4} =$

e) ${}^8\log 64 =$

f) ${}^8\log \frac{1}{64} =$

g) ${}^{10}\log 100 =$

h) ${}^{10}\log 0,01 =$

i) ${}^5\log 1 =$

j) ${}^2\log \frac{1}{16} =$

k) ${}^7\log \frac{1}{343} =$

l) ${}^3\log \sqrt{3} =$

m) ${}^e\log \frac{1}{e^3} =$

n) ${}^e\log 1 =$

o) ${}^7\log 343 =$

p) ${}^e\log e =$

q) ${}^{10}\log 10 =$

r) ${}^4\log \frac{1}{16} =$

s) ${}^6\log 36 =$

t) ${}^3\log 81 =$

18.) Berechnen Sie: ${}^3\log b$ für $b \in \left\{9, 243, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{27}, 27, \frac{1}{81}\right\}$

19.) Berechnen Sie: ${}^5\log b$ für $b \in \left\{5, 125, \frac{1}{5}, \frac{1}{625}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{25}, \sqrt[4]{125}, 0,04, \frac{1}{125}\right\}$

20.) Berechnen Sie: ${}^{10}\log b$ für $b \in \left\{100, 10000, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \sqrt{10}, \sqrt[3]{100}, \sqrt[4]{1000}, 0,01, \frac{1}{10000}\right\}$

21.) Berechnen Sie: ${}^e\log b$ für $b \in \left\{e^2, e^{-2}, \frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}, \sqrt{e}, \sqrt[3]{e}, \sqrt[4]{e}, e^{\frac{3}{2}}, e \cdot \sqrt{e}\right\}$

22.) Berechnen Sie die Basis:

a) ${}^x\log 9 = -2$

b) ${}^x\log \frac{1}{625} = -4$

c) ${}^x\log 16 = -4$

d) ${}^x\log 512 = 3$

e) ${}^x\log 27 = 3$

f) ${}^x\log \frac{8}{729} = 3$

g) ${}^x\log \frac{1}{36} = -2$

h) ${}^x\log 81 = 4$

23.) Berechnen Sie den Numerus:

a) ${}^3\log x = 2$

b) ${}^{20}\log x = 3$

c) ${}^4\log x = -1$

d) ${}^{0,1}\log x = -0,25$

e) ${}^{125}\log x = 0,5$

f) ${}^{\frac{3}{4}}\log x = -\frac{1}{2}$

g) ${}^6\log x = 3$

h) ${}^e\log x = 2$

24.) Die angegebenen Ausdrücke sind mit Hilfe der Logarithmensätze additiv zu zerlegen:

a) $\log(x^2 y) =$

b) $\log(6r^2 s^3) =$

c) $\log(2xy^3) =$

d) $\log(a \cdot \sqrt{b}) =$

e) $\log \frac{4x^3}{y^2} =$

f) $\log \sqrt{c} \cdot \sqrt[3]{d} =$

g) $\log \frac{\sqrt{x}}{y} =$

h) $\log \frac{a}{\sqrt[3]{b}} =$

i) $\log \left(\frac{x \cdot \sqrt{y}}{\sqrt[3]{z}} \right) =$

j) $\log \frac{x^2 - y^2}{z^3} =$

k) $\log(xy^2 z^5) =$

l) $\log \frac{p^2 q^3}{rs^4} =$

L:

13. Übungsblatt: Logarithmus, Logarithmensätze

25.) Stellen Sie die Angaben als Logarithmus eines einzigen Terms dar!

a) $\log 2 - \log a + \frac{1}{2} \log b =$

c) $\log (1-x) + \log (1+x) - 2 \log x =$

e) $\frac{1}{2} \log (a+b) - \frac{1}{2} \log (a-b) =$

g) $3 \log a - \frac{1}{3} [\log x - \log (x-y)] =$

i) $\frac{1}{3} [5 \log x + 2 \log (x-y)] - \log x - \frac{1}{2} \log y =$

b) $2 \log x + \log y - \frac{2}{3} \log z =$

d) $2 \log (a+b) - \log (a-b) + 3 \log a =$

f) $2 \log x + \frac{1}{4} [\log a - \log (a-b)] =$

h) $\frac{1}{3} \log x - \log y - \frac{2}{3} \log z =$

j) $3 \log - \log y - \frac{1}{5} [2 \log (a-b) + \log c] =$

26.) Berechnen Sie mit dem Taschenrechner die natürlichen Logarithmen: (auf 5 Dezimalen)

a) $\ln \sqrt{e} =$

b) $\ln \sqrt[3]{e} =$

c) $e^{\ln 2} =$

d) $2^{\ln 3} =$

e) $5^{\ln e} =$

f) $\ln 2^{\ln 2} =$

g) $\ln(\ln 2) =$

h) $\ln(\ln e) =$

27.) Zeichnen Sie den Graphen der folgenden Potenz- und Logarithmusfunktionen. Was beobachten Sie zwischen c und d? Graphen der Aufgaben a und b bzw. c und d?

a) $y=f(x)=10^x$ mit $x \in \{-1; -0,8; -0,6; \dots; 0,6; 0,8; 1\}$

b) $y=f(x)=\lg x$ für $x \in \{0,1; 0,5; 0,8; 1; 2; \dots 10\}$

c) $y=f(x)=e^x$ mit $x \in \{-3,-2,-1,0,1,2\}$

d) $y=f(x)=\ln x$ für $x \in \{0,1; 0,2; 0,5; 0,8; 1, 2, \dots, 10\}$

28.) Ermitteln Sie den dekadischen Logarithmus(= Zehner-Log.) mit dem Taschenrechner auf 6 Dezimalen:

a) $\lg 3 =$

b) $\lg 11 =$

c) $\lg 120 =$

d) $\lg 5,7 =$

e) $\lg 1,543 =$

f) $\lg 19,563 =$

g) $\lg 427,7 =$

h) $\lg 759,75 =$

i) $\lg 2375,9 =$

j) $\lg 38952 =$

k) $\lg 2195357 =$

l) $\lg 0,325 =$

m) $\lg 0,03234 =$

n) $\lg 0,003234 =$

o) $\lg 0,0000029 =$

p) $\lg 0,00029 =$

q) $\lg 1000 =$

r) $\lg 100000 =$

s) $\lg 0,01 =$

t) $\lg 0,00001 =$

29.) Gegeben ist der dekadische Logarithmus(= Zehner-Logarithmus) einer Zahl x. Die Zahl x, der Numerus, ist auf 6 Dezimalen zu ermitteln!

a) $\lg x = 1,98346$

b) $\lg x = 3,12376$

c) $\lg x = 0,63429$

d) $\lg x = -0,6543$

e) $\lg x = 0,04538$

f) $\lg x = -1,43265$

g) $\lg x = -3$

h) $\lg x = 5$

i) $\lg x = -2,81604$

j) $\lg x = -3,8976$

k) $\lg x = 4,678$

l) $\lg x = -0,0345$

30.) Ermitteln Sie den natürlichen Logarithmus mit dem Taschenrechner auf 6 Dezimalen:

a) $\ln 2 =$

b) $\ln 7 =$

c) $\ln 159 =$

d) $\ln 3164 =$

e) $\ln 0,2 =$

f) $\ln 0,98 =$

g) $\ln 0,01 =$

h) $\ln 0,076 =$

i) $\ln e =$

j) $\ln 1/e =$

k) $\ln \sqrt{5} =$

l) $\ln \sqrt{0,25} =$

31.) Berechnen Sie den Numerus vom natürlichen Logarithmus auf 5 Dezimalen:

a) $\ln x = 1,345$

b) $\ln x = -3,4$

c) $\ln x = 3,543$

d) $\ln x = -0,043$

e) $\ln x = 0,7658$

f) $\ln x = -0,23$

g) $\ln x = 2,78$

h) $\ln x = 5$

32.) Die angegebenen Ausdrücke sind mit Hilfe der Logarithmensätze additiv zu zerlegen:

a) $\log(a-b) =$

b) $\log(x^2 - y^2)^3 =$

c) $\log \sqrt{\frac{16a^2 - 25b^2}{2a}} =$

d) $\log 5a^{12} \sqrt[3]{b} =$

e) $\log \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} =$

f) $\log \sqrt[4]{\frac{a^3 b}{c^2}} =$

g) $\log \frac{\sqrt{a}}{b^5 c} =$

h) $\log \frac{(v-w)^3}{\sqrt{(v-w)}} =$

L:

2. Exponentialgleichungen

Von den Exponentialgleichungen, bei denen die Variable x im Exponenten auftritt, sind drei Typen von Gleichungen leicht zu lösen.

Typ I: Gleiche Basen - verschiedene Exponenten

Bsp.: 1.) Löse die Exponentialgleichung $2^{x-5} \cdot 4^{3x+7} = 16^4$ in $\mathbb{R}$!

$$2^{x-5} \cdot 4^{3x+7} = 16^4$$

Wandle die Basiszahlen um!

$$2^{x-5} \cdot (2^2)^{3x+7} = (2^4)^4$$

Multipliziere die Hochzahlen!

$$2^{x-5} \cdot 2^{6x+14} = 2^{16}$$

Multiplikation bedeutet Addition der Hochzahlen

$$2^{7x+9} = 2^{16}$$

Erkenntnis: Gleiche Basiszahl 2

$$7x+9=16$$

Gleichsetzen der verschiedenen Exponenten

$$7x=7$$

$$\underline{\underline{x=1}}$$

$$\text{Probe: } 2^{-4} \cdot 2^{20} = 2^{16}$$

$$2^{16} = 2^{16} \quad \text{w.A.} \quad L=\{1\}$$

Bsp.: 2.) Löse die folgende Exponentialgleichung in $\mathbb{R}$!

$$3^{2x-3} - 3^{2x-5} = 3^{x-1} - 3^{x-3} \quad \text{Basiszahlen lassen sich nicht mehr umwandeln!}$$

Neuer Schritt: Hebe jeweils die **Potenz mit dem kleinsten Exponenten** heraus! Dies führt die Summe in eine Multiplikation über. Dieses Verfahren nennt man „Faktorisieren“!

$$3^{2x-5}(3^2 - 1) = 3^{x-3}(3^2 - 1)$$

Berechne die Klammerausdrücke!

$$3^{2x-5} \cdot 8 = 3^{x-3} \cdot 8$$

Division durch 8!

$$3^{2x-5} = 3^{x-3}$$

Erkenntnis: Gleiche Basiszahl 3

Die Lösung x ergibt sich durch Gleichsetzen der verschiedenen Exponenten (Hochzahlen)!

$$2x-5=x-3$$

Lösung der linearen Gleichung führt zu x !

$$\underline{\underline{x=2}}$$

$$\text{Probe: } 3^1 - 3^{-1} = 3^1 - 3^{-1}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{w.A.} \quad L=\{2\}$$

Typ II: Verschiedene Basen - gleiche Exponenten

Bsp.: 3.) Löse die Exponentialgleichung $2^{x-3} \cdot 81 = 4 \cdot 3^{x-1}$ in R!

$$2^{x-3} \cdot 81 = 4 \cdot 3^{x-1} \quad / :81 \quad / :4 \quad \text{Dividiere durch 81 bzw. 4!}$$

$$\frac{2^{x-3}}{4} = \frac{3^{x-1}}{81} \quad \text{Wandle 4 und 81 in Potenzen um!}$$

$$\frac{2^{x-3}}{2^2} = \frac{3^{x-1}}{3^4} \quad \text{Zusammenfassung der Division laut den Potenzrechenregeln!}$$

$$2^{x-5} = 3^{x-5} \quad \text{Erkenntnis: verschiedene Basiszahlen - gleiche Exponenten}$$

Die Lösung x ergibt sich durch Gleichsetzen der gleichen Exponenten mit Null!

$$x-5=0 \quad \text{Probe: } 2^{5-3} \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^{5-1}$$

$$\underline{x=5} \quad 2^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^4 \quad \text{w.A.} \quad L=\{5\}$$

Bsp.: 4.) Löse die folgende Exponentialgleichung in N!

$$4^{x-1} = 5 \cdot 2^{2x-7} + (3^{x-2})^2 \quad \text{Wandle die Basiszahlen um!}$$

$$(2^2)^{x-1} = 5 \cdot 2^{2x-7} + (3^{x-2})^2 \quad \text{Beachte die Potenzrechenregeln!}$$

$$2^{2x-2} = 5 \cdot 2^{2x-7} + 3^{2x-4}$$

Neuer Schritt: Potenzen mit gleicher Basis werden auf eine Seite gebracht

$$2^{2x-2} - 5 \cdot 2^{2x-7} = 3^{2x-4} \quad \text{Die Potenz mit der kleinsten Hochzahl wird herausgehoben!}$$

$$2^{2x-7} (2^5 - 5 \cdot 1) = 3^{2x-4} \quad \text{denn laut Potenzrechenregeln gilt: } 2^{2x-7} \cdot 2^5 = 2^{2x-2}$$

$$2^{2x-7} (32 - 5) = 3^{2x-4}$$

$$2^{2x-7} \cdot 27 = 3^{2x-4} \quad \text{Division durch 27!}$$

$$2^{2x-7} = \frac{3^{2x-4}}{27} \quad \text{Umwandlung der Zahl 27 in eine Potenz!}$$

$$2^{2x-7} = \frac{3^{2x-4}}{3^3} \quad \text{Zusammenfassung der Division laut den Potenzrechenregeln!}$$

$$2^{2x-7} = 3^{2x-7} \quad \text{Erkenntnis: verschiedene Basiszahlen - gleiche Exponenten}$$

Die Lösung x ergibt sich durch Gleichsetzen der gleichen Exponenten mit Null!

$$2x - 7 = 0 \quad \text{Lösung der linearen Gleichung führt zu x!}$$

$$2x = 7$$

$$\underline{x = \frac{7}{2}}$$

$$\text{Probe: } 4^{\frac{7}{2}-1} = 5 \cdot 2^{2 \cdot \frac{7}{2}-7} + \left(3^{\frac{7}{2}-2}\right)^2 \quad \text{Für die Grundmenge N gilt: } L=\{ \}$$

$$4^{\frac{5}{2}} = 5 \cdot 2^0 + \left(3^{\frac{3}{2}}\right)^2 \quad \text{Für die Grundmenge R gilt: } L=\left\{\frac{7}{2}\right\}$$

$$2^5 = 5 \cdot 1 + 3^3 \\ 32 = 32 \quad \text{w.A.}$$

Typ III: Verschiedene Basen - verschiedene Exponenten

Bsp.: 5.) Löse die Exponentialgleichung $2^{x-2} \cdot 9 = 8 \cdot 3^{x-1}$ in R!

$$2^{x-2} \cdot 9 = 8 \cdot 3^{x-1} \quad / :9 \quad / :8$$

Dividiere durch 9 bzw. 8!

$$\frac{2^{x-3}}{8} = \frac{3^{x-1}}{9}$$

Wandle 8 und 9 in Potenzen um!

$$\frac{2^{x-3}}{2^3} = \frac{3^{x-1}}{3^2}$$

Zusammenfassung der Division laut den Potenzrechenregeln!

$$2^{x-6} = 3^{x-3}$$

Erkenntnis: verschiedene Basiszahlen - verschiedene Exponenten

Die Lösung x ergibt sich durch Logarithmieren!

$$\ln 2^{x-6} = \ln 3^{x-3}$$

Logarithmusrechenregel!

$$(x-6) \ln 2 = (x-3) \ln 3$$

Ausmultiplizieren!

$$x \ln 2 - 6 \ln 2 = x \ln 3 - 3 \ln 3$$

Alle x auf eine Seite, Zahlen auf die andere!

$$x \ln 2 - x \ln 3 = -3 \ln 3 + 6 \ln 2$$

Herausheben!

$$x(\ln 2 - \ln 3) = -3 \ln 3 + 6 \ln 2$$

Dividieren!

$$x = \frac{-3 \ln 3 + 6 \ln 2}{\ln 2 - \ln 3} = 18,386$$

$$L = \{18,386\}$$

14.) Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in R! (mit Probe)

a) $2^x = 16$

b) $3^{2x} = 9$

c) $5^{3x-1} = \frac{125}{5}$

d) $\frac{5^{2x+2}}{5^2} = 5^4$

e) $2^{3x-2} \cdot 4^{3x+1} = \frac{2^{11}}{2^{3x-1}}$

f) $2^{\frac{x-2}{x+4}} = \frac{1}{4} \cdot 8^{\frac{x+5}{x-5}}$

g) $2^x + 3 \cdot 2^{x+1} = 28$

h) $2 \cdot 7^x - 7^{x-1} = \frac{13}{49}$

i) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

j) $2^{2x+1} = 5 \cdot 4^{x-2} + 3^{2x-1}$

//////////////////////////////////// //////////////////////////////////////

15.) Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen in R! (mit Probe)

a) $2 \cdot 3^{2x+2} - 3 \cdot 2^{2x} = 3 \cdot 2^{2x+3} + 2 \cdot 3^{2x+1}$

b) $3^{x+4} - 7 \cdot 3^{x+1} = 5^{x+3} - 5^{x+2}$

c) $2 \cdot 9^{x+1} - 3 \cdot 4^x = 6 \cdot 4^{x+1} + 6 \cdot 9^x$

d) $20 \cdot 2^{3x-5} + 32 \cdot 2^{3x-6} = 36 \cdot 2^{2x+1}$

e) $2^{3x+1} - 11 \cdot 8^{x-1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-4}$

f) $3^{2x-1} - 11 \cdot 9^{x-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2x}$

3. Logarithmische Gleichungen

Definition:

Eine Gleichung heißt logarithmisch, wenn die Variable im **Logarithmusterm** steht

Beispiel: $\log(x + 1) - \log(x - 1) = \log(2x - 3)$

Wie bei den Bruch- und den Wurzelgleichungen, muss eine **Definitionsmenge** bestimmt werden.

Der Logarithmus ist nur für positive Zahlen definiert.

Im obigen Beispiel gilt $D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x > 1.5\}$ (weil $x+1 > 0$; $x-1 > 0$; $2x-3 > 0$)

Zur Lösung sind die Logarithmengesetze erforderlich:

$$\log(a) + \log(b) = \log(ab)$$

$$\log(a) - \log(b) = \log \frac{a}{b}$$

$$\log a^n = n \cdot \log a$$

$$\text{und } a^x = b \Leftrightarrow x = {}^a\log b$$

Typ I: Nur Logarithmen

Die Logarithmen müssen auf jeder Seite zu einem Logarithmus zusammengefasst werden!

Beispiel:

$$\log(2x^2 + 1) - \log(x - 1) = \log(2x - 3) \quad \text{Zusammenfassen!}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x > 1.5\}$$

$$\log \frac{2x^2+1}{x-1} = \log(2x - 3) \quad \text{Logarithmus wegfallen lassen!}$$

$$\frac{2x^2+1}{x-1} = 2x - 3 \quad \text{Nenner multiplizieren!}$$

$$2x^2 + 1 = (2x - 3)(x - 1) \quad \text{Ausmultiplizieren!}$$

$$2x^2 + 1 = 2x^2 - 3x - 2x + 3 \quad \text{Zusammenfassen und x auf eine Seite, Zahlen auf die andere Seite bringen}$$

$$-2 = -5x$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$L = \{\}$ wegen der Definitionsmenge!

Typ II: Logarithmen und Zahlen

Die Logarithmen müssen auf eine Seite gebracht und zu einem Logarithmus zusammengefasst werden, die Zahlen kommen auf die andere Seite!

Beispiel:

$$\lg(x - 1) + \lg(x) = 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{x \mid x > 1\} \quad \text{Zusammenfassen!}$$

$$\lg(x^2 - x) = 1 \quad \text{Umschreiben in die exponentielle Schreibweise!}$$

$$10^1 = x^2 - x$$

$$x^2 - x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_1 \approx 3,7 \\ x_2 \approx -2,7 \end{array} \quad \Rightarrow \quad L = \{3, 7\}$$

39.)

a) $\lg x + \lg 4x = \lg 96$

c) $\lg 8x + \lg 3x = \lg 96$

b) $\lg 2x + \lg 3x = \lg 726$

d) $\lg x + \lg 2x + \lg 4x = \lg 0,001$

40.)

a) $\lg (x-3) + \lg 7 = \lg (x+3)$

c) $\lg (6x+3) = \lg (3x-1) + \lg 3$

b) $\lg (x+3) - \lg (x-3) = \lg 4$

d) $\lg x + \lg (x+1) = 2 \lg (1-x)$

L: Ad 39.) a) $x=3$; b) $x=11$; c) $x=2$; d) $x=0,05$; Ad 40.) a) $x=4$; b) $x=5$; c) $x=2$; d) $x=1/3$

41.) Löse die Gleichungen nach x auf:

a) $\lg(x+1) = 2$

b) $\lg x + \lg(x-1) = 1$

c) $\lg(x+1) - \lg(x-1) = 0$

d) $\ln x = 4$

e) $\ln(x-1) + \ln x = \ln 2$

f) $\ln(x+1) - 2 \ln x = 1$

I. Lineare Gleichungssysteme

1. Lineare Gleichungssysteme in 2 Variablen

Eine Gleichung der Form

$$a \cdot x + b \cdot y = c \text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}, a \text{ und } b \text{ nicht zugleich } 0$$

heißt lineare Gleichung in den 2 Variablen x und y.

Lösungsmethoden von linearen Gleichungssystemen

Aufgabe: Löse folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 2y = 8 \\ \text{II.} & 3x + y = 9 \end{array}$$

a. Substitutionsmethode (Einsetzungsmethode)

Aus einer Gleichung wird eine Unbekannte durch die andere ausgedrückt. Der erhaltene Ausdruck wird in die andere Gleichung eingesetzt.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 2y = 8 \\ \text{II.} & 3x + y = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = 8 - 2y \\ \text{II.} & 3x + y = 9 \end{array}$$

I in II einsetzen:

$$\begin{array}{l} 3 \cdot (8 - 2y) + y = 9 \\ \Rightarrow \underline{y = 3} \end{array}$$

y in I einsetzen:

$$\begin{array}{l} x + 6 = 8 \\ \Rightarrow \underline{x = 2} \end{array}$$

b. Eliminationsmethode (Additionsmethode)

Man multipliziert die Gleichungen mit geeigneten Zahlen, sodass beim Addieren der Gleichungen eine Unbekannte wegfällt.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 2y = 8 \\ \text{II.} & 3x + y = 9 \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 2y = 8 \\ \text{II.} & -6x - 2y = -18 \quad + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -5x = -10 \\ \Rightarrow \underline{x = 2} \end{array}$$

c. Komparationsmethode (Gleichsetzungsmethode)

Aus beiden Gleichungen wird die gleiche Unbekannte durch die andere ausgedrückt. Anschließend werden die erhaltenen Ausdrücke gleichgesetzt.

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x + 2y = 8 \\ \text{II.} & 3x + y = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = 8 - 2y \\ \text{II.} & 3x = 9 - y \end{array}$$

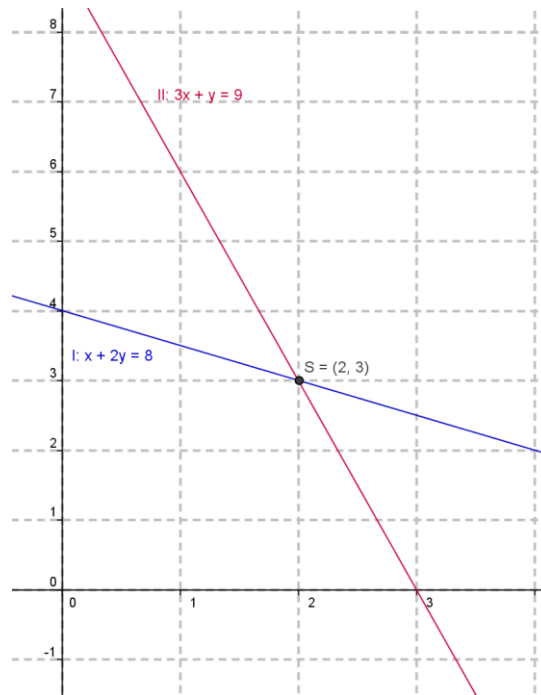
$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = 8 - 2y \\ \text{II.} & x = 3 - \frac{y}{3} \end{array}$$

I und II gleichsetzen

$$\begin{array}{l} 8 - 2y = 3 - \frac{y}{3} \\ \Rightarrow \underline{y = 3} \end{array}$$

d. Grafische Methode

Beide Gleichungen werden als lineare Funktionen aufgefasst und in ein Koordinatensystem gezeichnet. Die Koordinaten des Schnittpunkts ergeben die Lösung.



Lösungsmöglichkeiten von Linearen Gleichungssystemen

- | | | |
|-----------------------------|----------------------|--|
| a. 1 Lösung | Bsp.: $x = 2, y = 3$ | $\Rightarrow L = \{(2/3)\}$ |
| b. Keine Lösung | Bsp.: $2 = 3$, f.A. | $\Rightarrow L = \{\}$ |
| c. Unendlich viele Lösungen | Bsp.: $3 = 3$, w.A. | $\Rightarrow L = \{(x/y) \mid ax+by=c\}$ |
-

2. Lineare Gleichungssysteme in mehreren Variablen

Die Methoden für das Lösen von linearen Gleichungssystemen mit mehreren Variablen sind die gleichen. Die Anzahl der Variablen wird schrittweise reduziert.

Übungsblatt 14: Lineare Gleichungssysteme

Berechne folgende Gleichungssysteme:

- 1)a) (1) $14x - 15y = 40$ b) (1) $3x - 5y = 0$ c) (1) $y = 4$
 (2) $6x - 35y = -40$ (2) $2x + y = 0$ (2) $6 - 5y = 0$
- 2)a) (1) $20 - (8x - 3y) = 4y - (2x + y - 2)$ b) (1) $6x = 1 + 5y$
 (2) $11x - (x + y + 2) = 30 - 5(9x - 4y + 7)$ (2) $10y - 12x = -2$
- 3)a) (1) $x - 2y = 3x - y + 4$ b) (1) $x + 2y = 3x - 4y + 3$
 (2) $2x + y = 4$ (2) $4x - 7y = 5y - 6$
- 4)a) (1) $\frac{x-2y}{4} - \frac{y-x}{5} = 3$ b) (1) $\frac{x+1}{2} - \frac{y-1}{3} = y - x$
 (2) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 1 - \frac{5-y}{4}$ (2) $\frac{x+3}{3} + \frac{y-2}{2} = x + y - 4$
- 5)a) (1) $\frac{x+2y}{4} - y - \frac{y-x}{5} = 3$ b) (1) $\frac{3x-y}{5} = x - \frac{3x+y+3}{7}$
 (2) $\frac{3x+2y-3}{3} = \frac{2x+y-5}{4}$ (2) $\frac{x-3}{6} = \frac{x}{5} - \frac{y}{15}$
- 6)a) (1) $\frac{3x+2y}{5} = \frac{24}{10}$ b) (1) $\frac{x+2}{3} - \frac{3y-5}{4} = \frac{y+3}{6}$
 (2) $\frac{4x+14y}{6} = \frac{25}{3}$ (2) $\frac{2y+3}{3} - \frac{2x+5}{7} = \frac{3x-2}{5} - \frac{6}{7}$
- 7)a) (1) $(3x+1)(3y-1) - (9x+1)y = -2$ b) (1) $(3x+1)(2-3y) + (3x+2)3y = 14$
 (2) $(5x+2)(5y-2) - (25y+2)x = -8$ (2) $(2x+3)(3y-3) - (6y+7)x = -4$

8) Die Summe aus dem Vierfachen einer Zahl und der Hälfte einer anderen Zahl ist 14. Die Summe aus den Drittel der ersten Zahl und dem Fünffachen der zweiten Zahl beträgt 21. Wie lauten die Zahlen?

9) Die Summe aus dem Doppelten einer Zahl und dem Dreifachen einer anderen Zahl ist 396. Die Summe aus dem Fünftel der ersten und der Hälfte der zweiten Zahl beträgt 56. Wie lauten die Zahlen?

10) Die Zehnerziffer einer dreistelligen Zahl ist 5. Vertauscht man die Hunderter- und die Einerziffer und addiert diese Zahl zur gegebenen, erhält man als Summe 908. Subtrahiert man die Zahl mit vertauschten Ziffern von der ursprünglichen Zahl, erhält man als Differenz 594. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

[Lösungen: 1)a) $L=\{(5;2)\}$ b) $L=\{(0;0)\}$ c) $L=\{\}$ 2)a) $L=\{(3;8)\}$ b) $L=\{(x;y) \mid 6x-5y=1\}$ 3)a) $L=\{\}$
 b) $L=\{(x;y) \mid -2x+6y-3=0\}$ 4)a) $L=\{(2;-3)\}$ b) $L=\{(3;4)\}$ 5)a) $L=\{(2;-3)\}$ b) $L=\{(x;y) \mid x-2y=-15\}$
 6)a) $L=\{(2;3)\}$ b) $L=\{(4;3)\}$ 7)a) $L=\{(1/3;0)\}$ b) $L=\{(1;2)\}$ 8) 3, 4 9) 75, 82 10) 751]

Übungsblatt 15: Lineare Gleichungssysteme

- 11) Eine dreistellige Zahl hat die Ziffernsumme 9. Die Zehnerziffer ist um 2 kleiner als die Hunderterziffer. Werden Zehner- und Einerziffer vertauscht, erhält man eine um 18 kleinere Zahl. Wie lautet die ursprüngliche Zahl?

12) Löse folgende Gleichungssysteme:

a)	(1) $3x - 2y + 3z = 16$	b)	(1) $7x + 3y - 2z = 45$	c)	(1) $3x + 7y - 3z = 38$
	(2) $x + y + z = 7$		(2) $5x + 7y - 5z = 35$		(2) $9x + 8y - 2z = 77$
	(3) <u>$4x - 3y + 2z = 13$</u>		(3) <u>$8x + 8y - 3z = 70$</u>		(3) <u>$12x - 7y + z = 29$</u>

13) Löse folgende Gleichungssysteme:

a)	(1) $4x - 3y + 2z = -10$	b)	(1) $3x - 5y + 2z = -30$	c)	(1) $3y - z = 7$
	(2) $2x + 9y - 4z = 12$		(2) $-9x + 3y - 8z = 10$		(2) $2x - 3y + 2z = -21$
	(3) <u>$-6x - 15y + 8z = -8$</u>		(3) <u>$6x - y + 4z = 3$</u>		(3) <u>$3x + y = -21$</u>

14) Löse folgende Gleichungssysteme:

a)	(1) $-\frac{x}{2} - \frac{y}{4} - z = 8$	b)	(1) $\frac{2x}{3} + y - \frac{z}{2} = 2$	c)	(1) $-\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} + z = 3$
	(2) $2x - 5y - 3z = 2$		(2) $\frac{2x+z}{3} = y - 5\frac{1}{3}$		(2) $z - \frac{x+2y}{3} = 6$
	(3) <u>$\frac{5x-7y}{y+z} = 2$</u>		(3) <u>$2x + y - z = 0$</u>		(3) <u>$\frac{y+3z}{x+2z} = -1\frac{1}{2}$</u>

15) Löse folgende Gleichungssysteme:

a)	(1) $3x + y = 0$	b)	(1) $2x + 3y - 4z = -5$	c)	(1) $4x - 10y + 6z = 11$
	(2) $-2x + y + 3z = 0$		(2) $5x - y + 3z = 7$		(2) $3x + 7y - z = 6$
	(3) <u>$5x + 4y - 2z = 0$</u>		(3) <u>$x - 7y + 11z = 9$</u>		(3) <u>$-x + \frac{5}{2}y - \frac{3}{2}z = 5$</u>

[Lösungen: 11) 531 12)a) $L=\{(2,1,4)\}$ b) $L=\{(6,5,6)\}$ c) $L=\{(5,5,4)\}$ 13)a) $L=\{(-2;4;5)\}$

b) $L=\{(3;7;-2)\}$ c) $L=\{(-8;3;2)\}$ 14)a) $L=\{(-28;-17,88;10,47)\}$ b) $L=\{(-3;2;-4)\}$ c) $L=\{(-6;-3;2)\}$

15)a) $L=\{(0;0;0)\}$ b) $L=\{ \}$ c) $L=\{ \}$

Textaufgaben zu Gleichungssystemen

gl56

Welcher Bruch gibt den Wert $\frac{1}{4}$, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermehrt, und den Wert $\frac{1}{3}$, wenn man Zähler und Nenner um 2 vermehrt? [$\frac{1}{7}$]

gl73

Verlängert man in einem Rechteck die eine Seite um 17cm und verkürzt die andere um 7cm, so bleibt die Länge der Diagonale gleich, die Fläche wächst aber um 840cm^2 . Berechne die Längen der Seiten.

gl72

Verlängert man eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks um 2cm und verkürzt die andere um 4cm, so entsteht ein Dreieck mit gleicher Hypotenuse, aber einem um 12cm^2 kleineren Flächeninhalt. Berechne die Längen der Katheten.
[7 und 6]

gl54

Jemand kauft 12kg einer besseren und 15kg einer schlechteren Sorte einer Ware und zahlt insgesamt 294€. Wieviel € kostet 1kg jeder Sorte, wenn 1kg der ersten Sorte um 20% teurer ist als 1kg der zweiten Sorte?

gl57

Ein Gastwirt kauft 300 Liter Weißwein und 400 Liter Rotwein und zahlt dafür 2080€. Einen Monat später kauft er nochmals 300 Liter Weißwein und 500 Liter Rotwein und zahlt jetzt 2390€. Berechne die Literpreise.
[2,8€ ; 3,1€]

gl75

Die Mischung einer 25%igen mit einer 70%igen Salzlösung gibt eine 55%ige Salzlösung. Nimmt man von der 25%igen Lösung um 3 Liter mehr und von der 70%igen um 3 Liter weniger, so erhält man eine 40%ige Lösung. Wieviel Liter von jeder Sorte wurden beim ersten Mischvorgang verwendet? [3 / 6]

gl71

Zwei gleich große Kapitalien werden mit 4% bzw. mit 5% verzinst (ohne Zinseszins). Nach einigen Jahren sind die Beträge auf 144.000€ bzw. 155.000€ angewachsen. Berechne den Anfangswert und die Anzahl der Jahre. [$K=100.000\text{€}$, 11 Jahre]

J. FUNKTIONEN

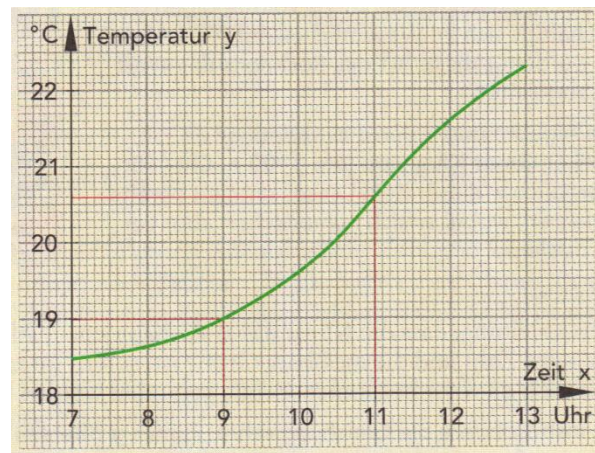
1. Wichtige Begriffe

Es gibt Größen, deren Werte sich im Laufe der Zeit nicht ändern (**konstante Größen**).

Z.B.: Die Länge einer bestimmten Strecke, die Masse eines bestimmten Gegenstands, ...

Andere **Größen** sind zeitlich **veränderlich**, z. B.: das Alter eines Menschen, ... oder auch die Temperatur an einem bestimmten Ort.

Das **Diagramm** zeigt den Temperaturverlauf an einem bestimmten Ort während einer gewissen Zeitspanne.



Zu jedem Zeitpunkt x herrscht eine bestimmte Temperatur y . Es ist auch nicht möglich, dass an einem bestimmten Ort keine oder gleichzeitig zwei verschiedene Temperaturen herrschen können.

Anders ausgedrückt:

Jedem Zeitpunkt x ist eindeutig eine bestimmte Temperatur y zugeordnet.

In der Mathematik bezeichnet man eine **eindeutige Zuordnung** zwischen zwei Größen als eine **Funktion**.

Wir schreiben: Zeitpunkt(x) $\rightarrow$ Temperatur(y) bzw. kurz: $(x) \rightarrow (y)$

und sagen auch:

Die Temperatur y ist **abhängig** von der Zeit x , oder:

Die Temperatur y ist **eine Funktion** der Zeit x

Vervollständige die Tabelle! Lies aus der Zeichnung ab!

Uhrzeit	7:00	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Temperatur	°C	°C	19 °C	°C	20,6 °C	°C	°C

Eine solche Tabelle nennt man **Zuordnungs- oder Wertetabelle**; sie enthält nur einzelne Werte (**Funktionswerte**) zu bestimmten Zeiten. Einen besseren Überblick bietet das Diagramm. Die **frei wählbare Variable** (hier die Zeit) wird dabei stets auf der **x-Achse** aufgetragen, die davon abhängige Variable (hier die Temperatur) wird auf der **y-Achse** aufgetragen.

Allgemeine Definition:

Eine Zuordnung f zwischen zwei Mengen A und B , die **jedem** $x \in A$ **genau ein** $y \in B$ zuordnet, heißt **Funktion**.

Sind A und B Mengen von reellen Zahlen, nennt man die Funktion **reelle Funktion**.

Sprechweisen:

x	Stelle, Argument
$y = f(x)$	Funktionswert (Wert) der Funktion an der Stelle x
$A = D_f$	Definitionsmenge der Funktion f (Menge der x -Werte)
W_f	Wertemenge (Menge der y -Werte)

Zuordnungen (Funktionen) können dargestellt bzw. beschrieben werden:

- (1) durch eine (Zuordnungs-) Tabelle, **Wertetabelle**
- (2) durch ein Diagramm bzw. ein Schaubild (**Graph einer Funktion**)
Die Menge $G = \{(x|f(x)) \mid x \in A\}$ heißt Graph der Funktion f .
- (3) durch eine Zuordnungsvorschrift (**Funktionsgleichung**, Funktionsterm)

Die Funktionsgleichung gibt an, wie die Variable y von der Variablen x abhängt:

$y = f(x)$.

$f(x)$ ist der Funktionsterm. x wird unabhängige Variable, y abhängige Variable genannt. Z. B. $y = x^2$

Schreibweisen:

Schreibweise	Sprechweise
$f: A \rightarrow R$	f ist eine Funktion von A nach R
$f: x \rightarrow f(x)$	f x wird zugeordnet f von x
$f: x \rightarrow y$	f x wird zugeordnet y
$x \rightarrow f(x)$	x wird zugeordnet f von x
$f: y = f(x)$	f mit y gleich f von x

Die Menge der Zahlen, die die unabhängige veränderliche Größe x annehmen kann, nennt man die **Definitionsmenge** D der Funktion.

Die Menge aller Werte, die die abhängige veränderliche Größe y für $x \in D$ annimmt, nennt man die **Wertemenge** W der Funktion.

Teilmengen von $\mathbb{R}$ können in Form von **Intervallen** angegeben werden:

Endliche Intervalle

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ beidseitig abgeschlossenes Intervall

$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ beidseitig offenes Intervall

$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall und umgekehrt

Unendliche Intervalle

z.B. $[a, \infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

2. LINEARE FUNKTIONEN

Def.:

Eine Funktion mit der Funktionsgleichung $f(x) = y = k \cdot x + d$ ($k, d \in \mathbb{R}$) heißt **lineare Funktion**.

Abbildungsvorschrift $\Rightarrow f(x) \rightarrow k \cdot x + d$

k ... Steigung, **kommt pro Einheit dazu!**

d ... Abstand vom Ursprung auf der y-Achse

Steigungsdreieck:

$k \Rightarrow$ auf x Achse 1 nach rechts, k nach oben (wenn positiv)
oder k nach unten (wenn negativ)

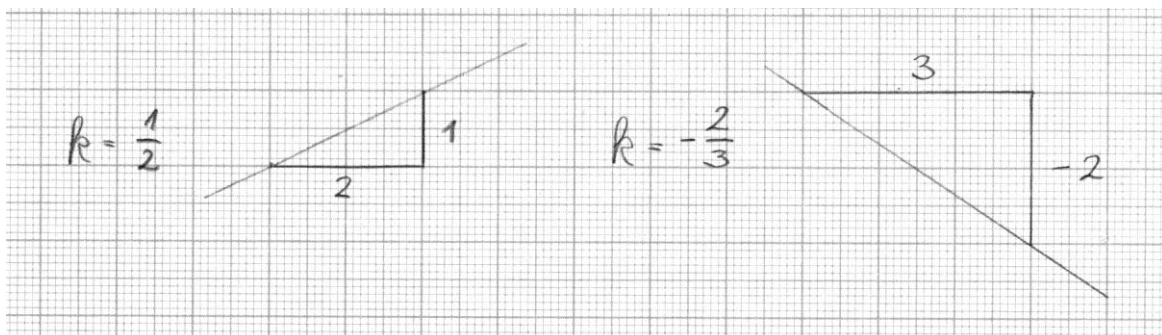
Wenn $k > 0$	$\Rightarrow$	Funktion steigt!
$k = 0$	$\Rightarrow$	Gerade liegt parallel zur x-Achse (horizontal)
$k < 0$	$\Rightarrow$	Gerade fällt

Wenn $d > 0$	$\Rightarrow$	Schnittpunkt mit y-Achse über dem Ursprung
$d = 0$	$\Rightarrow$	Schnittpunkt mit y-Achse im Ursprung
$d < 0$	$\Rightarrow$	Schnittpunkt mit y-Achse unter dem Ursprung

Wenn $d = 0$ ist, so spricht man von einer **homogenen linearen Funktion**, d. h. dass die Funktionen durch den Ursprung (Nullpunkt) geht.

Ist $d \neq 0$ so spricht man von einer **inhomogenen linearen Funktion**, wodurch zu erkennen ist, dass die Funktion nicht durch den Ursprung geht.

Beispiel:

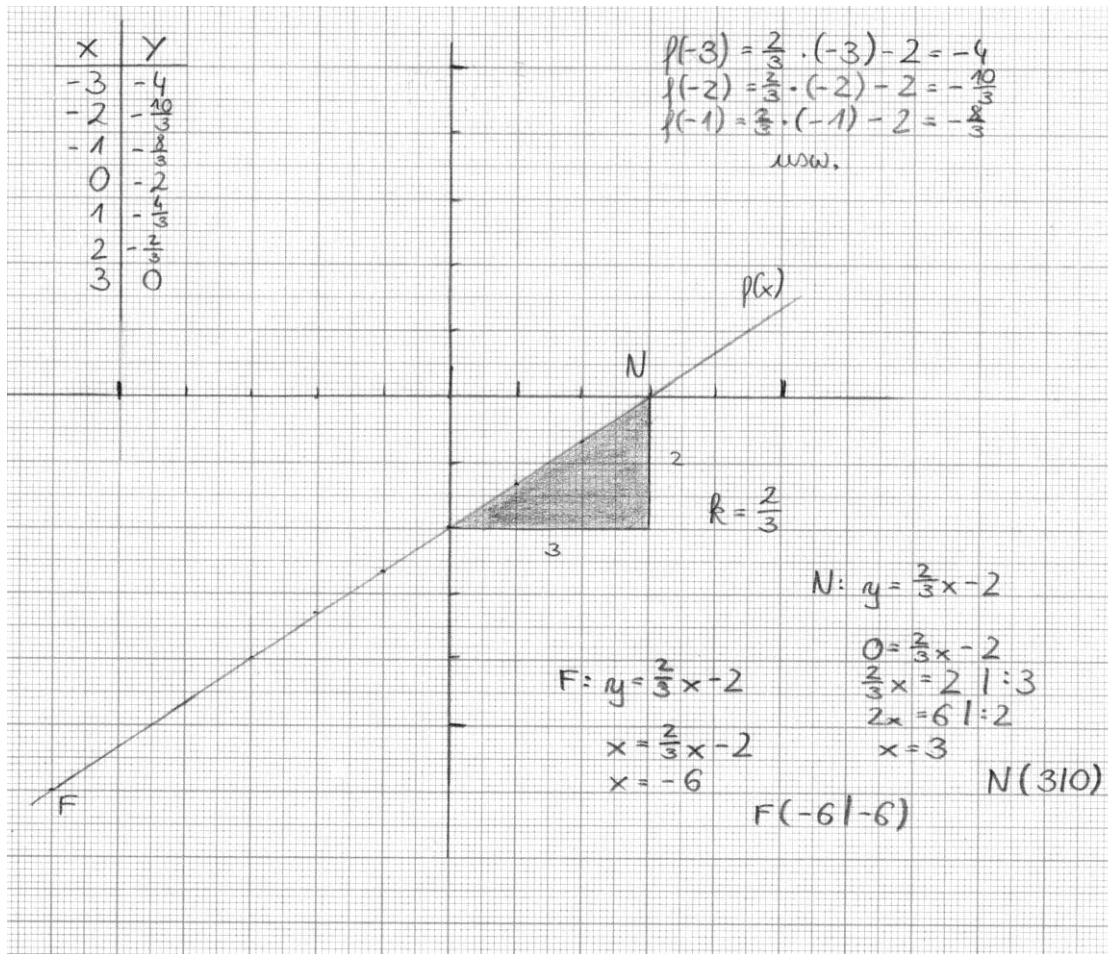


Erklärung: Nenner $\Rightarrow$ x-Achse
Zähler $\Rightarrow$ y-Achse

$$k = \Delta y / \Delta x$$

Beispiel:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $y = \frac{2}{3}x - 2$ im Intervall $[-3, 3]$



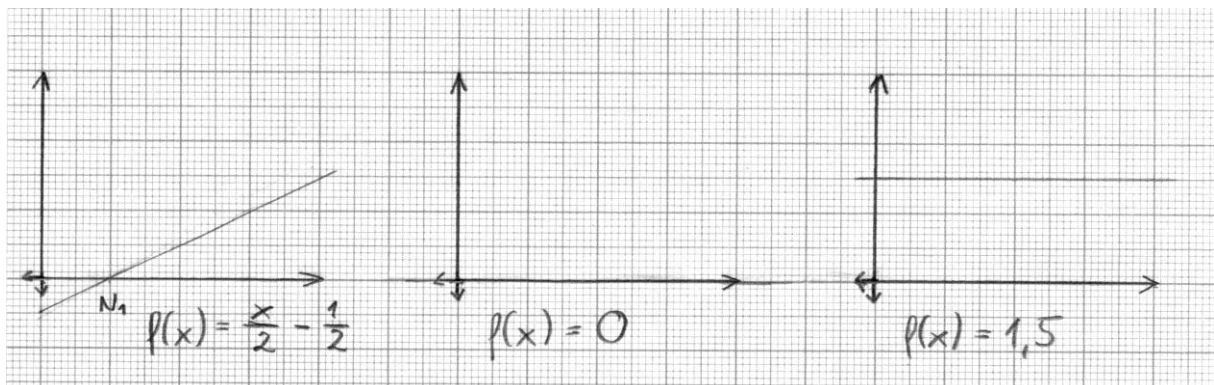
F ... Fixpunkt

Ein Fixpunkt ist ein Punkt, wo die x-Koordinate gleich der y-Koordinate ist. ($y = x$) = Schnittpunkt mit der 1. Mediane

N ... Nullpunkt

Ein Nullpunkt ist ein Punkt, wo die Gerade die x-Achse schneidet ($y = 0$)

Bei der linearen Funktion gibt es drei Möglichkeiten:



1 Nullstelle

(schneidet die x-Achse)

unendlich viele Nullstellen

(Gerade liegt auf der x-Achse)

keine Nullstelle

(liegt parallel zur x-Achse)

Ein Punkt liegt auf einer Geraden, wenn er die Funktionsgleichung erfüllt.

Bsp.:

Liegen A(3/1) und B(1/-1) auf $f(x)=3x-4$?

$A \in f(x)$? Koordinaten einsetzen!

$$1 = 3 \cdot 3 - 4$$

$$1 = 5 \quad \text{f. A.} \Rightarrow A \notin f(x)$$

$B \in f(x)$?

$$-1 = 3 \cdot 1 - 4$$

$$-1 = -1 \quad \text{w.A.} \Rightarrow B \in f(x)$$

Ermitteln der Funktionsgleichung aus 2 Punkten

2 Möglichkeiten:

a. Mittels linearem Gleichungssystem:

A und B in Gleichung $y = kx + d$ einsetzen $\Rightarrow$ k und d berechnen!

b. Formel für k: $A(x_1/y_1), B(x_2/y_2)$

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dann einen Punkt in Funktionsgleichung einsetzen und d berechnen.

Bsp.: Bestimme rechnerisch die Lineare Funktion, die durch A(2/1) und B(6/-1) verläuft!

Vergleich von linearen Funktionen: Berechnung der Lage von 2 Geraden zueinander

Beim Bestimmen der Lage von 2 Geraden zueinander unterscheidet man zwischen 2 Methoden:

- (1) Graphische Methode
- (2) Lösen eines linearen Gleichungssystems (meist Gleichsetzungsverfahren)

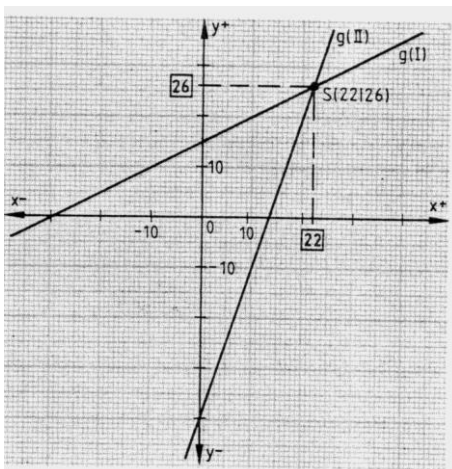
Dabei gibt es wiederum 3 Lösungsmöglichkeiten:

Grafisch	Lösung der Gleichung
Es gibt einen Schnittpunkt!	x und y ergeben eindeutige Werte (Bsp.: $x=3$, $y=4$)
Sie sind parallel!	falsche Aussage (f.A.) z.B. $3 = 4$
Sie sind identisch!	wahre Aussage (w.A.) z.B. $3 = 3$

a) Schnittpunkt:

Beispiel:

- 1) $x - 2y = -30$
- 2) $3x - y = 40$



Diese beiden Geraden haben den Schnittpunkt S (22/26).

Bemerkung: Die genauen Werte für die Koordinaten des Schnittpunktes S wird man nur bei entsprechend genauer Zeichnung erhalten.

Das Zahlenpaar (22/26) ist Lösung jeder der beiden Gleichungen und somit Lösung des gegebenen Gleichungssystems: $L = \{(22/26)\}$

Eine lineare Gleichung mit zwei Variablen hat im allgemeinen unendlich viele Lösungen. Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen haben im allgemeinen ein Zahlenpaar als Lösung.

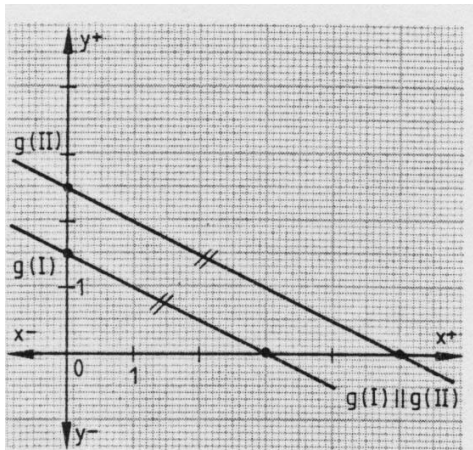
b) parallel

Die beiden Geraden können parallel zueinander liegen und haben daher keinen Schnittpunkt.

Beispiel:

- 1) $x + 2y = 3$
- 2) $x + 2y = 5$

$$L = \{ \}$$



Das Gleichungssystem hat keine Lösung, da kein Zahlenpaar beide Forderungen

$(x + 2y = 3 \mid x + 2y = 5)$ zugleich erfüllen kann.

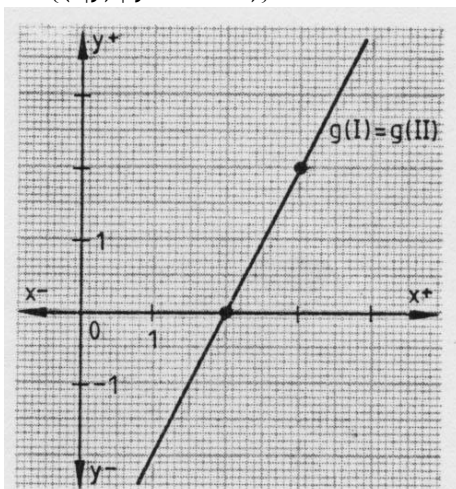
c) identisch

Die beiden Geraden fallen in einer einzigen Geraden zusammen, wodurch sie unendlich viele gemeinsame Punkte haben.

Beispiel:

- 1) $2x - y = 4$
- 2) $4x - 2y = 8$

$$L = \{(x|y) \mid y = 2x - 4\}$$



Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen.

Die Gleichungen sind äquivalent (Gleichung 2) ist gleich 2 mal Gleichung 1)).

Das Gleichungssystem besteht eigentlich nur aus einer einzigen Gleichung mit zwei Variablen.

Übungsblatt 16: Lineare Funktionen 1

16) Bestimme Wertetabelle und Graph für die Funktion $y = 2x + 2$ für die Definitionsbereiche

a) $D = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ und

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 2\}$ (entspricht der Schreibweise: $D = [-2, 2]$)

17) Bestimme Wertetabelle und Graph, Steigung k , Steigungswinkel α und Abstand d für die Funktionen.

a) $y = 3x + 1$

b) $y = \frac{1}{2}x - 3$

c) $y = -x - 4$

18) Zeichne den Funktionsgraphen und bestimme die Funktionsgleichung aus:

a) $k = -5$, $d = -2$

b) $k = \frac{3}{4}$, $d = -\frac{1}{4}$

c) $k = -3$, $d = \frac{1}{2}$

19) Berechne die Nullstellen und Fixpunkte der Funktionen aus Beispiel 18) und überprüfe rechnerisch und zeichnerisch, ob folgende Punkte Elemente der Funktionen sind:

für a) $A(1/1)$, $B(-3/13)$

für b) $P(0/-\frac{1}{4})$, $Q(-1/-1)$

für c) $C(2/-7)$, $D(-2/8,5)$

20) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden durch Messung und Rechnung:

a) $f: y = 3x + 2$

b) $f: 2y = 5x + 10$

c) $f: y = 7x - 3$

d) $f: y = \frac{9x}{10} + 3$

e) $f: -3x - 4 = 0$

g: $y = 2x - 1$

g: $y = \frac{1}{2}x + 2$

g: $y = x$

g: $y = 2x - 4,1$

g: $x = \frac{4}{3}(y-2)$

21) Berechne aus den gegebenen Punktepaares die Geradengleichungen und bestimme Nullstelle und Fixpunkt.

a) $A(2/1)$, $B(-5/-13)$

b) $A(-3/2)$, $B(-4/-1)$

c) $C(2/2)$, $D(3/3)$

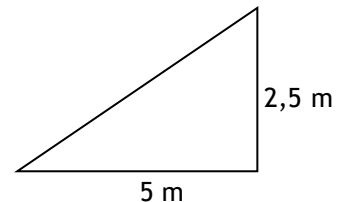
d) $P(-1/-7)$, $Q(2/-4)$

22) Liegen folgende drei Punkte auf einer Geraden? Berechne!

a) $A(3/\frac{14}{3})$, $B(0/\frac{2}{3})$, $C(-1/-\frac{2}{3})$

b) $P(0/-7)$, $Q(2/-1)$, $R(-2/-10)$

23) Ein Damm hat annähernd den Querschnitt eines rechtwinkligen Dreiecks (siehe Skizze). Wie groß ist seine Steigung?



24) Eine Straße hat eine Steigung von a) 18% b) 7% c) 15%.

Welchem Steigungswert k entspricht das? Gib jeweils die Seitenverhältnisse von einem passenden Steigungsdreieck an!

25) Finde die Gleichung einer Geraden, die parallel zur Geraden $g: y = 7x+1$ ist und durch den Punkt a) $P(1/-2)$ b) $Q(2/9)$ c) $R(0/4)$ geht.

[Lösungen: 19)a) $N(-\frac{2}{5}/0)$, $F(-\frac{1}{3}/-\frac{1}{3})$, A nein, B ja

20)a) $S(-3/-7)$ b) $S(-\frac{3}{2}/\frac{5}{4})$ c) $S(\frac{1}{2}/\frac{1}{2})$ d) $S(6,45/8,8)$ e) $S(-\frac{4}{3}/1)$

21)a) $y=2x-3$; $N(1,5/0)$; $F(3/3)$ b) $y=3x+11$; $N(-3,67/0)$; $F(-5,5/-5,5)$ c) $y=x$; $N(0/0)$; F unendlich viele d) $y=x-6$; $N(6/0)$; kein Fixpkt. (warum?)

22)a) ja b) nein

23) $k=0,5$ 24)a) $k=0,18$ b) $k=0,07$ c) $k=0,15$ 25)a) $d=-9$ b) $d=-5$ c) $d=4$]

Übungsblatt 17: Lineare Funktionen 2

26) Überprüfe, welche der gegebenen Punkte auf der Geraden $g: y = 4x - 5$ liegen:

- a) $A(1/-1)$ b) $B(2/4)$ c) $C(20/75)$

27) Welchen Anstieg hat die Gerade g , die durch die Punkte A und B geht?

- a) $A(2/1), B(-5/-13)$ b) $A(0/2), B(20/52)$ c) $A(-3/2), B(-4/-1)$

28) Von einer Geraden g sind zwei Punkte bekannt. Gesucht ist die Geradengleichung.

- a) $P(1/-3), Q(2/2)$ b) $S(4/2), T(0/1)$ c) $U(-2/1), V(1/-5)$

29) Liegt der Punkt $P(1/2)$ auf der Geraden $g(A,B)$? (Rechnerische und graphische Lösung!)

- a) $A(9/17), B(17/5)$ b) $A(2/3), B(-7/-6)$ c) $A(-3/-2), B(-4/-3)$

30) In welchem Punkt schneidet die Gerade $g(A,B)$ die x -Achse und wo die 1. Mediane? (Rechnerische Lösung)

- a) $A(2/3), B(4/2)$ b) $A(1/2), B(-7/2)$ c) $A(2/4), B(-1/-5)$

31) Welche Funktionsvorschrift legt jene Gerade fest, die durch den Punkt $P(5/1)$ geht und parallel zur Geraden $y = 2x - 1$ verläuft.

- 32) Wie 31) für a) $P(-2/2)$ $g: y = 2(x - 3)$ b) $P(1/2), g[A(3/4), B(-3/-4)]$

33) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden durch Messung und Rechnung:

- a) $f: y = 3x + 2$ b) $f: 2y = 5x + 10$ c) $f: y = 7x - 3$ d) $f: y = \frac{9x}{10} + 3$ e) $f: -3x - 4 = 0$
 $g: y = 2x - 1$ $g: y = \frac{1}{2}x + 2$ $g: y = x$ $g: y = 2x - 4,1$ $g: x = \frac{4}{3}(y - 2)$

34) Liegen folgende drei Punkte auf einer Geraden? Berechne!

- a) $A(3/\frac{14}{3}), B(0/\frac{2}{3}), C(-1/-\frac{2}{3})$ b) $P(0/-7), Q(2/-1), R(-2/-10)$

[[Lösungen: 26)a) $A \in g$ b) $B \notin g$ c) $C \in g$ 27)a) $k=2$ b) $k=2,5$ c) $k=3$ 28)a) $y=5x-8$ b) $y=\frac{1}{4}x+1$
c) $y=-2x-3$ 29)a) $P \notin g$ b) $P \in g$ c) $P \in g$ 30)a) $N(8/0), F(8/3/8/3)$ b) kein $N, F(2/2)$
c) $N(2/3/0), F(1/1)$ 31) $y=2x-9$ 32)a) $y=2x+6$ b) $y=\frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$] 33)a) $S(-3/-7)$ b) $S(-\frac{3}{2} / \frac{5}{4})$
c) $S(\frac{1}{2} / \frac{1}{2})$ d) $S(6,45/8,8)$ e) $S(-\frac{4}{3}/1)$ 34)a) ja b) nein

Übungsblatt 18: Lineare Funktionen - Textbeispiele

- 44.) Zwei Beförderungsbetriebe A und B für Sondertransporte haben folgende Konditionen:
- A: Grundpreis von 100 €, Preis pro km Beförderung: 4 €
- B: kein Grundpreis, Preis pro km Beförderung: 8 €.
- Stellen Sie die Kosten bei beiden Betrieben als Funktion der gefahrenen Kilometer dar.
 - Wie hoch ist der Preis bei den einzelnen Transportbetrieben, wenn man eine Ware 60 km transportieren muss?
 - Stellen Sie die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar! (+Wertetabelle und Vorgabe für den Graphen: 10 km = 1 cm, 100 € = 1 cm)
 - Ab welchem km ist der Betrieb A günstiger als B?
 - Ab welchem km ist der Betrieb B günstiger als A?
 - Bei welcher Kilometerzahl sind die Kosten vom Betrieb A und Betrieb B gleich?
 - Wie weit kann man eine Ware für 500 € mit den einzelnen Konditionen transportieren?
- 45.) Ein selbständiger Handelsvertreter steht vor der Entscheidung, ob er für seine Tätigkeit mit dem eigenen PKW oder mit einem gleichwertigen Mietwagen ausführen soll. Sein eigener PKW verursacht ihm Kosten von 1 € /km (Treibstoff, Versicherung, Kfz-Steuer, Service usw.), der Mietwagen hingegen nur 0,2 € /km. Bei diesem sind aber zusätzlich zum Kilometergeld noch 360 € pro Monat Leihgebühr zu entrichten.
- Bei welcher Anzahl von km sind die entstehenden Monatskosten gleich hoch?
 - Wie hoch sind die Kosten?
 - Stellen Sie die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar! (+Wertetabelle und Vorgabe für den Graphen: 100 km = 1 cm, 100 € = 1 cm)
 - Bei welcher Kilometerzahl kommt der Mietwagen günstiger?
- 46.) In einem Betrieb werden Rohre erzeugt. Die fixen Kosten für diese Produktion betragen 7000 €, die variablen Kosten sind 4 € pro m erzeugten Rohres. Der Verkaufserlös für ein 1m Rohr beträgt 6 €:
- Wie lauten die Kostenfunktion und die Erlösfunktion?
 - Bei welcher Stückzahl sind die Kosten gleich?
 - Wie hoch sind die Kosten im Fall b)?
 - Wie viel m Rohr müssen verkauft werden, damit die Firma einen Gewinn erzielt?
 - Stellen Sie die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar! (+Wertetabelle und Vorgabe für den Graphen: 1000 m = 1 cm, 4000 € = 1 cm)
 - Wie viel m Rohr müssen erzeugt bzw. verkauft werden, damit ein Gewinn von 5000 € zu erwarten wäre?
- 47.) Ein Autobusunternehmen bietet zwei Tarife an: Tarif A: 12 € Grundgebühr und 1€ pro gefahrenen Kilometer; Tarif B: 36 € Grundgebühr und 0,6 € pro gefahrenen Kilometer.
- Wie lauten die Kostenfunktionen?
 - Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen K_A und K_B und lesen Sie aus der Zeichnung, für welche Entfernungen Tarif A günstiger ist, für welche Entfernungen Tarif B günstiger ist und für welche Entfernung beide Tarife gleich günstig sind! (10 km = 1cm; 10 € = 1cm)
 - Stellen Sie dasselbe durch Rechnung fest!
 - Wie groß sind die Kosten für jene Entfernung, für die beide Tarife gleich günstig sind?
- 48.) 1 kg Äpfel kosten bei einem Händler 1,20 €. Kauft man dieselbe Sorte beim Erzeuger, so beträgt der Preis 0,40€ pro kg. Allerdings kommen für die Fahrt zum Erzeuger Spesen in der Höhe von 12 € dazu. Welche Menge Äpfel muss man kaufen, damit sich die Fahrt zum Erzeuger lohnt, a) wenn man den Zeitaufwand für die Fahrt nicht berücksichtigt und b) wenn man mit einem Zeitaufwand von 4 Stunden rechnet und für eine Stunde 4 € veranschlagt? Gesucht: Rechnerische und zeichnerische Lösung!

L: Ad 44.) a) $K_A(x)=4x+100$; $K_B(x)=8x$; b) 340, 480; f) 25km; Ad 45.) a) $K_P(x)=x$, $K_M(x)=0,2x+360$; b) 450km; Ad 46) $K(x)=4x+7000$; $E(x)=6x$; b) 3500; c) 21000€; f) 6000; Ad 47) $K_A(x)=x+12$, $K_B(x)=0,6x+36$; d) 60 km; Ad 48.) $K_H(x)=1,20x$, $K_E(x)=0,40x+12$; a) 15kg; b) 35kg

PS: Gar nichts tun, das ist die allerschwierigste Beschäftigung und zugleich diejenige, die am meisten Geist voraussetzt. (Oscar WILDE)

Übungsblatt 19: Lineare Funktionen - Textbeispiele

62.) Frau M. stellt einen Artikel in Heimarbeit her.

- a) Für jedes Stück erhält sie 1,50 €. Wie viel erhält sie für x Stück? Geben Sie die Einnahmen als Funktion der Stückzahl an (lineare Erlösfunktion).
- b) Die Materialkosten betragen pro Stück 0,50 €. Dazu kommen noch Fixkosten von 40 € pro Woche. Wie viel kostet die Erzeugung von x Stück? Geben Sie auch die Kosten als Funktion der Stückzahl an (lineare Kostenfunktion).
- c) Wie viel verdient Frau M. (Reingewinn), wenn sie 60 Stück herstellt?
- d) Wie viel Stück muss sie pro Woche herstellen, damit sie keinen Verlust hat, und wie groß sind die Einnahmen bzw. Ausgaben bei dieser Stückzahl?
- e) Stellen Sie beide Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar (10 Stück = 1 cm, 10 € = 1 cm).

63.) Eine Mobiltelefongesellschaft bietet folgende Tarife an:

Wertkarte: 0,60 €/Minute

Tarif A: 0,20 €/Minute, 10 € Grundgebühr

Tarif B: 0,10 €/Minute, 25 € Grundgebühr

- a) Stellen Sie die Gebühr bei allen Tarifen als Funktion der Gesprächszeit dar.
- b) Wie hoch ist der Preis bei den einzelnen Tarifen, wenn man jeweils 1 Stunde pro Monat telefoniert?
- c) Ab welcher Gesprächszeit ist Tarif A günstiger als ein Wertkartenhandy?
- d) Ab welcher Gesprächszeit ist Tarif B günstiger als Tarif A?
- e) Stellen Sie die drei Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar (20 Minuten = 1 cm, 10 € = 1 cm.)

64.) Eine Brauerei rechnet für die Auslieferung seiner Getränkekisten mit dem eigenen Verkaufsfahrzeug 0,80€ pro Kiste bei monatlichen Fixkosten von 840 €. Ein Logistikunternehmen bietet die Auslieferung von Getränkekisten für 1,15 € pro Kiste an.

- a) Erstellen Sie Terme für die Kosten der Auslieferung von x Kisten.
- b) Bei welcher Stückzahl sind die Kosten gleich?
- c) Wie hoch sind die Kosten im Fall b)?
- d) Welche Kosten entstehen für die Auslieferung von 2500 Kisten?
- e) Für welche Auslieferungszahlen ist das Logistikunternehmen kostengünstiger?
- f) Stellen Sie die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar! (+Wertetabelle und Vorgabe für den Graphen: 1000 Kisten = 1 cm, 1000 € = 1 cm)
- g) Unterbreiten Sie der Brauerei ein Angebot, sodass die Kosteneinsparung bei einem Absatz von 4000 Kisten 680 € beträgt.

65.) Die Firma "Big Beauty" produziert den Lippenstift "Amore". Die bei der Produktion entstehenden Kosten $K(x)$ sind von der hergestellten Stückzahl abhängig. Bei der Produktion von $x = 100$ Stück entstehen Kosten von 385 €, bei der Produktion von $x = 200$ Stück entstehen Kosten von 410 €.

Zwischen der Stückzahl und den entstehenden Kosten bestehe ein linearer Zusammenhang.

- a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion.
- b) Wie hoch sind die Kosten bei einer Produktion von $x = 140$ Stück?
- c) Bei welcher Menge x liegt die Gewinnschwelle, wenn ein Verkaufspreis von 5,20 € pro Lippenstift erzielt wird?
- d) Zeichnen Sie die Graphen von $K(x)$ und $E(x)$ in ein Koordinatensystem.

L: Ad 62.) a) $E(x)=1,5x$; b) $K(x)=0,5x+40$; c) 20€, d) 40 Stück, 60 €; Ad 63.) a) W: $y = 0,6x$; A: $y = 0,2x + 10$; B: $y=0,1x + 25$; b) W: 36 €; A: 22 €; B: 31 €; c) 25min; d) 150min; Ad 64.) $K_B(x)=0,8x+840$; $K_L(x)=1,15x$; b) 2400; c) 2760€; d) 2875€, 2840€; Ad 65.) a) $K(x)=0,25x+360$, b) 395; c) $E(x)=5,2x$, 73

PS: Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind, verstehe ich sie selbst nicht mehr. (Albert EINSTEIN)

3. Quadratische Funktionen

Def.:

Quadratische Funktionen sind Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung der Form

$$f(x) = y = ax^2 + bx + c$$

$$(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

dargestellt werden können.

Bsp.:

$$f_1: y = x^2$$

$$\text{in } [-3, 3]$$

$$f_2: y = -x^2$$

$$\text{in } [-3, 3]$$

$$f_3: y = -x^2 + 2$$

$$\text{in } [-3, 3]$$

$$f_4: y = x^2 + 2x - 4$$

$$\text{in } [-4, 2]$$

Auch für quadratische Funktionen kann man eine Wertetabelle aufstellen und einen Funktionsgraph zeichnen.

Was fällt auf?

- Alle Funktionen der Form $f(x) = ax^2$ gehen durch den Ursprung!
- negatives Vorzeichen vor dem x^2 bedeutet Öffnung nach unten. Positives Vorzeichen bedeutet Öffnung nach oben!
- Bei einer Funktion $y = ax^2 + c$ wird der Graph der Funktion $y = ax^2$ genau um c verschoben. Ist das c positiv nach oben, ist es negativ nach unten.
- Quadratische Funktionen haben alle einen „Bauch“, einen höchsten oder tiefsten Punkt = „Extremstelle“

ÜBUNGSBEISPIELE:

Bestimme die Nullstellen und die Fixstellen für folgende Funktionen und zeichne den Graph:

$$1. \quad f: y = 3x^2 - 5 \text{ in } [-4, 4]$$

$$6. \quad f: y = 2/3x^2 - 6 \text{ in } [-5, 5]$$

$$2. \quad f: y = -x^2 \text{ in } [-3, 3]$$

$$7. \quad f: y = f(x) = x^2 + 2x - 6 \text{ in } [-5, 3]$$

$$3. \quad f: y = -x^2 + 8x \text{ in } [0, 6]$$

$$8. \quad f: y = -x^2 - 2x + 15 \text{ in } [-5, 3]$$

$$4. \quad f: y = 2x^2 + 4x + 4 \text{ in } [-4, 3]$$

$$9. \quad f: y = x^2 - 4x - 12 \text{ in } [-2, 6]$$

$$5. \quad f: y = x^2 - 4 \text{ in } [-4, 4]$$

$$10. \quad f: y = 2x^2 + 4x - 15 \text{ in } [-3, 5]$$

Textbeispiele Quadratische Funktionen

1 Benzinverbrauch 1

Der Kraftstoffverbrauch eines PKW ist in guter Näherung eine quadratische Funktion der Fahrgeschwindigkeit. Für einen Klein-PKW einer bestimmten Automarke gibt die folgende Formel den Zusammenhang zwischen dem Benzinverbrauch y (in Liter je 100 km) und der Geschwindigkeit v (zwischen 50 km/h und 140 km/h) an:

$$y = 0,00059 \cdot v^2 - 0,048 \cdot v + 5,5$$

- Berechnen Sie den Benzinverbrauch bei einer Geschwindigkeit von 130 km/h.
- Bei welcher Geschwindigkeit wird gegenüber a) eine 20-prozentige Verringerung des Benzinverbrauchs erreicht?

Lösung:

- Für v in der Formel 130 einsetzen und berechnen. $y = 9,231$ l/100km
- 80 % des Ergebnisses von a) berechnen und für y in die Formel einsetzen und die Gleichung lösen. $v = 110,31$ km/h. 2.Lösung ist auszuschließen, weil sie negativ ist (-28,96)

2 Benzinverbrauch 2

Laut Messungen eines Autofahrerclubs ergibt sich für eine bestimmte Automarke abhängig von der Geschwindigkeit v (in km/h) folgender Benzinverbrauch BV (in Liter / 100 km):

v	30	40	80
BV	6,25	6,2	7,0

Man geht davon aus, dass der Benzinverbrauch quadratisch von der Geschwindigkeit abhängt.

- Wie lautet der Funktionsterm für den Benzinverbrauch?
- Wie hoch ist der Benzinverbrauch bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 120 km/h?
- Berechnen Sie bei welcher Geschwindigkeit der Verbrauch genau 8 Liter/100 km beträgt und interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung :

- $BV(v) = 0,0005v^2 - 0,04v + 7$**
- $BV(120) = 0,0005 \cdot 120^2 - 0,04 \cdot 120 + 7 = 9,4$ Liter pro 100 km/h
- $BV(v) = 8$

$$8 = 0,0005v^2 - 0,04v + 7$$

$$0 = 0,0005v^2 - 0,04v - 1$$

$$v_{1,2} = \frac{0,04 \pm \sqrt{0,04^2 - 4 \cdot 0,0005 \cdot (-1)}}{2 \cdot 0,0005}$$

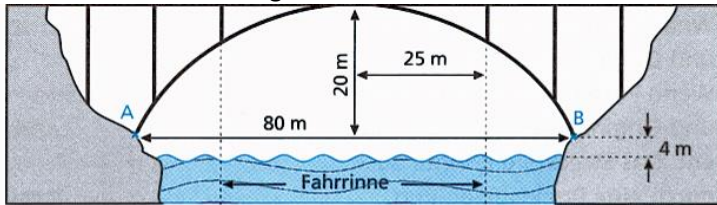
$$v_1 = -20 \text{ km/h} \quad v_2 = 100 \text{ km/h}$$

Antwort: Bei 100 km/h beträgt der Verbrauch 8 Liter/100 km. Die negative Lösung ist nicht sinnvoll.

3 Brückenbogen:

Der Brückenbogen dieser Brücke hat die Form einer Parabel.

- Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel, indem Sie den Ursprung (0/0) in den Scheitel des Brückenbogens legen.
- Kann ein Frachtschiff die Fahrrinne am Rande noch gefahrlos durchfahren, wenn es 17m über die Wasseroberfläche ragt?



a) A(-40/-20) $-20 = 1600a - 40b$

B(40/20) $-20 = 1600a + 40b$

0 (0/0) $\rightarrow c=0$

$\rightarrow y = -0,0125x^2$

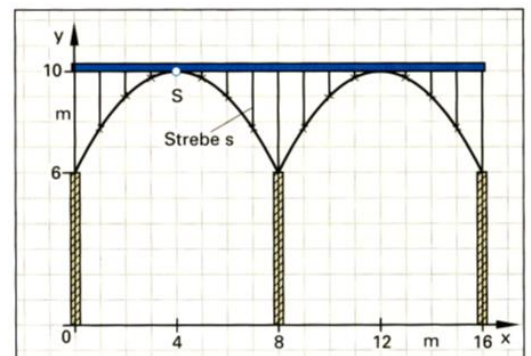
b) P(25/y) $y = -0,0125 \cdot 625 = -7,81m$

24m – 7,81m = 16,19 m Fahrhöhe stehen zur Verfügung. Antwort: nein!!

4 Stahlbrücke

Die Stützpfeiler einer Stahlbrücke haben auf Parabelbögen zusätzliche Streben, die im Abstand von einem Meter zueinander angeordnet sind (siehe Skizze)

- Ermitteln Sie die Funktionsgleichung der in der Zeichnung dargestellten Parabel!
- Berechnen Sie die Längen der verschiedenen Streben im ersten Bogen.



Lösung:

- a) Möglicher Lösungsweg:

Betrachte nur den ersten Bogen: 3 Punkte bekannt (0/6), S(4/10), (8/6)

$y = ax^2 + bx + c$

3 Variablen, daher 3 Gleichungen nötig:

I. $f(0)=6 \rightarrow c = 6$

II. $f(4) = 10 \rightarrow 10 = 16a + 4b + 6$

III. $f(8) = 6 \rightarrow 6 = 64a + 8b + 6$

mit oder ohne Technologieeinsatz: $a = -0,25$; $b = 2$; $c = 6$

$y = -0,25x^2 + 2x + 6$

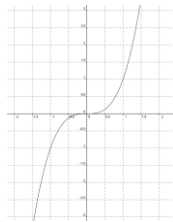
- b) **Operieren, Interpretieren**

Wertetabelle:

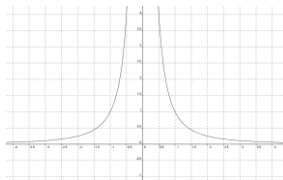
x	0	1	2	3	4
s(x) in m	4	2,25	1	0,25	0

4. Diverse Potenzfunktionen

$$f(x)=x^3$$



$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$



Def.:Asymptote

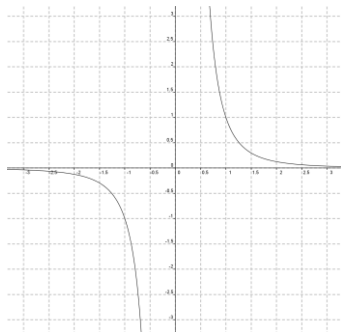
Eine Asymptote ist eine Gerade, der sich die Funktion annähert, sie aber nie berührt!

Hier:

Die X-Achse ist eine Asymptote!

$X=0$ ist eine Asymptote!

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$



Asymptoten: x-Achse und x=0!

Bsp.:

Bestimme die senkrechten Asymptoten und zeichne die Funktionen!

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{in } [-5; 5]$$

$$f(x) = \frac{1}{x-3} \quad \text{in } [-2; 8]$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3} \quad \text{in } [-5; 4]$$

5. Wurzelfunktionen

Def.:

Die Funktionsgleichung einer **Wurzelfunktion** hat folgende Form:

$$f(x) = \sqrt[n]{x}$$

Dabei ist:

$n \in \mathbb{N}$, der **Wurzelexponent**, eine natürliche Zahl größer gleich 2. $x \in \mathbb{R}_0^+$, der **Radikand** und der Funktionswert, eine positive reelle Zahl.

Wurzelfunktionen sind Spezialfälle von Potenzfunktionen.

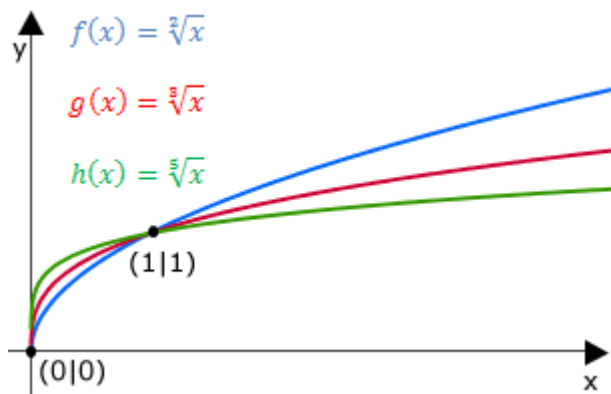
Beispiele für Wurzelfunktionen:

1) $f(x) = \sqrt{x}$ **Quadratwurzel**

2) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ **Kubikwurzel**

3) $f(x) = \sqrt[5]{x}$

Wichtige Eigenschaften der Wurzelfunktion



- **Definitionsbereich:** $D = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$
- **Wertebereich:** $W = \mathbb{R}_0^+ = [0; \infty[$
- **Nullstellen:** für $x=0$ ist die Wurzelfunktion gleich Null! $N(0/0)$
- **Gemeinsame Punkte:** Der Graph jeder Wurzelfunktion startet im Ursprung $(0|0)$, und geht durch den Punkt $(1|1)$
- **Monotonie:** streng monoton steigend

Die Wurzelfunktion ist die Umkehrfunktion der Potenzfunktion für positive Zahlen

6. Exponentialfunktionen

In den Naturwissenschaften (Physik, Chemie, Biologie) und in vielen anderen Bereichen (Bankgewerbe, Medizin, ...) wird das Verhalten von Größen untersucht, die sich mit der Zeit t ändern. Beispiele dafür sind:

- Verzinsung eines Kapitals;
- Abnahme der unzerfallenen Atome beim radioaktiven Zerfall;
- Wachstum eines Holzbestandes, einer Bakterienkultur, einer Population, ...
- Verhalten der Stromstärke beim Ein- und Ausschalten eines Gleichstroms in einem Stromkreis mit Widerstand und Kapazität oder Induktivität.

Def.:

Exponentialfunktionen sind Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung

$$y = a^x \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

(oder: $y = c \cdot a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), c ist eine Konstante ungleich 0)

dargestellt werden können.

Die **Variable** x tritt somit **als Exponent** mit einer **konstanten Basis** auf.

Potenzfunktion: Basis variabel, Exponent konstant!! (Bsp.: $y = x^5$)

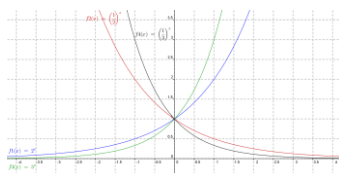
Das **Wachstum pro Einheit ist prozentuell**.

Vergleich **Lineare Funktion:** Wachstum pro Einheit ein **konstanter Faktor!!**

Bsp.:

Zeichne den Graphen der Exponentialfunktion $f_1: y = 2^x$ im Intervall $[-4, 4]$

- Was ist Definitionsmenge und was ist Wertemenge einer Exponentialfunktion dieser Form?
- Zeichne weiters die Funktion $f_2: y = (1/2)^x$. Was fällt dir auf?
- Fertige Wertetabellen für die Funktionen $f_3: y = 3^x$ und $f_4: y = (1/3)^x$ an und zeichne sie ein!
- Gibt es Punkte, die Elemente aller Exponentialfunktionen dieser Form sind?
- Gibt es Asymptoten? Wenn ja, welche?



Gesammelte Eigenschaften der Exponentialfunktion:

- (1) Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$
- (2) Wertemenge $W = \mathbb{R}^+$
- (3) Die x-Achse ist Asymptote
- (4) $y = a^x$ geht immer durch den Punkt P (0,1)
- (5) $y = a^x$ ist streng monoton wachsend für $a > 1$
- (6) $y = a^x$ ist streng monoton fallend für $0 < a < 1$
- (7) $y = a^x$ und $y = a^{-x}$ liegen symmetrisch bezüglich der y-Achse!

$e = 2,71828.... \Rightarrow$ **Eulersche Zahl**; wichtig für viele Naturgesetze, nicht periodisch!

Jede Exponentialfunktion lässt sich auch als Funktion mit der Basis e darstellen!

$y = c \cdot e^{\lambda x}$ wachsende Funktion
 $y = c \cdot e^{-\lambda x}$ abnehmende Funktion

oder anders:

$N(t) = N_0 \cdot a^t$ N(t): Wert nach der Zeit t N₀ : Anfangswert a: Wachstumsfaktor (bei Wachstum ist $a > 1$, bei Abnahme ist $0 < a < 1$)	$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ λ (sprich: Lambda): Wachstumskonstante bei Abnahme schreibt man $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$
---	--

a ist der Wachstums- oder Zerfallsfaktor!

$a = 1 + p/100$ Wachstumsfaktor
 $a = 1 - p/100$ Zerfallsfaktor
 p...Prozentsatz

$y = 2^x$ bedeutet Verdoppelung des Funktionswertes pro Einheit! = Zunahme von 100% pro Einheit

$y = 1,3^x$ bedeutet eine Zunahme von 30% pro Einheit!

$y = 0,8^x$ bedeutet eine Abnahme von 20% pro Einheit!

Übungsblatt Exponentialfkt.

- 29) Eine Bakterienkultur wächst um 15% in der Stunde. Wenn am Anfang 200 000 Bakterien vorhanden sind, nach wie vielen Stunden sind es 500 000? In welcher Zeit verdoppelt sich die Bakterienzahl?
- 30) Ein Kapital K_0 wird mit p % Zinsen angelegt. Nach wie vielen Jahren hat es einen Wert K_n angenommen?
 a) $K_0 = € 45\,000$, $p = 8\%$, $K_n = € 61\,222$ b) $K_0 = € 124\,000$, $p = 4,5\%$, $K_n = € 210\,289,3$
- 31) Die Bevölkerung eines Staates wächst exponentiell, wobei pro Jahr ein Zuwachs von 8 % zu verzeichnen ist. In wie vielen Jahren wird die Bevölkerungszahl 20 Millionen betragen, wenn sie heute 8,5 Mio. beträgt?
- 32) In der Chemie stellt man die in einer Lösung vorhandene Konzentration an Wasserstoffionen in der Form $c = 10^{-k}$ dar. Die Zahl k nennt man pH-Wert der Lösung.
 a) Drücke allgemein den pH-Wert durch c aus.
 b) Berechne für $c = 0,05$, $c = 0,000\,008$ und $c = 0,000\,000\,000\,03$ den pH-Wert!
- 33) In 1 cm³ Kuhmilch zählt man sofort nach dem Melken etwa 340 Keime. Die Vermehrung der Keime erfolgt nach der Formel $K_t = K_0 \cdot 4^t$ (Zeit in Stunden). Wann gibt es zehnmal so viele Keime?
- 34) Die Halbwertszeit von Radium beträgt 1590 Jahre. Wie lange dauert es, bis 85% einer bestimmten Masse zerfallen sind? $\left[m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}} \quad t \text{ und } T \text{ in Stunden, } T \dots \text{Halbwertszeit} \right]$
- 35) Das Kohlenstoffisotop C-14 ist radioaktiv und hat eine Halbwertszeit von 5760 Jahren. Ein Tierskelett hat nur noch a) 10% b) 30% des ursprünglichen C-14-Anteils. Wie alt ist das Skelett? (Formel von Bsp. 34)
- 36) (Fortsetzung von Bsp. 35): Auf welchen Betrag ist der C-14-Anteil nach 10 000, 15 000, 20 000 Jahren gesunken?
- 37) Der Luftdruck nimmt mit der Höhe exponentiell ab. Ein Ballonfahrer misst einen Luftdruck von a) 790 mbar b) 640 mbar c) 580 mbar.
 Zur gleichen Zeit misst man in der unter ihm liegenden Bodenstation (Seehöhe: 386 m) einen Luftdruck von $p = 985$ mbar. Wie hoch ist der Ballonfahrer über dem Erdboden?
 (Der Formelzusammenhang kann mit $p(h) = p_0 \cdot e^{-\lambda h}$ angegeben werden, wobei der Luftdruck auf Meeresniveau durchschnittlich mit $p_0 = 1034$ mbar gegeben ist; h angegeben in Meter)
- 38) Wenn Licht durch eine Flüssigkeit geht, verliert es an Helligkeit (Intensität). Es ist $I(d) = I_0 \cdot a^d$, wenn $I(d)$ die Helligkeit nach Zurücklegen einer Strecke der Länge d (Meter) bezeichnet. Nach welcher Strecke ist die Helligkeit des Lichtes auf $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10}$ des ursprünglichen Wertes I_0 abgesunken, wenn $a = 0,8$ ist?
- 39) Eine Bakterienkultur verdreifacht sich innerhalb von 24 Stunden.
 a. Um wie viel Prozent vermehrt sich die Bakterienkultur pro Stunde?
 b. Wie lange dauert es, bis die Bakterienkultur sich verzehnfacht hat?
 c. Wie viele Bakterien waren am Beginn vorhanden, wenn nach einem halben Tag 2500 Bakterien vorhanden sind?
 d. Wie viele Bakterien sind nach 3 Halbtagen vorhanden?
 e. Zeichne die Funktion im Bereich $[0;48]$!

- 40) Von einem chemisches Element sind nach 10 Tagen nur noch 30 % vorhanden
- Um wie viel Prozent zerfällt das Element pro Tag?
 - Wie lange dauert es, bis nur noch 1 % des Elements vorhanden ist?
 - Wie viel Gramm des Elements waren am Anfang vorhanden, wenn nach 15 Tagen noch 50 Gramm vorhanden sind?
 - Wie viel Gramm sind nach einem Monat vorhanden? (Runde auf 3 Dezimalstellen!)
 - Zeichne die Funktion im Bereich $[0;48]$!

[Lösungen: 29)a) $t_1=6,6$ h b) $t_2=5$ h 30)a) 4 Jahre b) 12 Jahre 31) ca. 11 Jahre 32)b) $\text{pH}=1,3$; $\text{pH}=5,1$; $\text{pH}=10,5$ 33) nach ca. $1,66h=100\text{min}$ 34) ca. 4352 Jahre 35) ca. 19000 Jahre 36) ca. 30%; ca. 16%; ca. 9% 37)a) ca. 1750m b) ca. 3421m c) ca. 4202m 38) ca. 3,1m; ca. 4,9m; ca. 10,3m] 39)a) 4,68% b) 54,28 Stunden c) 1443 Bakterien d) 7498 Bakterien 40) a) 11,34% b) 38,25 Tage c) 304,29 g d) 8,22g

Textaufgaben zu div. Funktionen

Fk30

Zwei Stromanbieter A,B geben folgende Konditionen für die Jahresabrechnung:

A: Grundgebühr € 84, Preis / kWh € 0,06.

B: keine Grundgebühr, Preis / kWh € 0,30.

- Zeichne die Kostenfunktionen.
- Bei welchem Verbrauch sind die Gesamtkosten gleich?

Fk31

Ein Vertreter kann seine Tätigkeit mit eigenem PKW oder mit einem Mietwagen ausführen. Die Kosten für den eigenen PKW betragen € 0,60/km (alles eingerechnet), der Mietwagen kostet € 0,20/km + € 12/Tag.

- Bei wie viel km/Tag entstehen gleiche Kosten und wie hoch sind diese?
- Erstelle eine Graphik im geeigneten Maßstab.

Fk27

Ein Rechteck hat die Seitenlängen a, b und die Fläche A. Beschreibe, wie sich die Seite b ändert, wenn bei gleich bleibendem Flächeninhalt die Seite a im Intervall I variiert. Stelle dazu eine Formel auf, und zeichne den Graph der Funktion mit einer Wertetabelle.

$A = 48\text{cm}^2$, $I = [2; 24]$ (cm).

Fk29 Ein quadratisches Prisma hat die Seite a, die Höhe h und das Volumen V.

- Beschreibe in einer Wertetabelle, wie sich für $V = 1000\text{cm}^3$ die Höhe ändert, wenn a das Intervall $[5;20]$ durchläuft und zeichne den Graph.
- Beschreibe in einer Wertetabelle, wie sich für $V = 1000\text{cm}^3$ die Seite a ändert, wenn h das Intervall $[5;20]$ durchläuft und zeichne den Graph.

LE09

Ein Kapital K ist in 10 Jahren bei gleichbleibender Verzinsung von 80.000.-- auf 150.000.- angewachsen.

- Wie hoch war K verzinst?
 - Auf welchen Betrag wird es bei 4% Zinsen in weiteren 10 Jahren anwachsen?
 - Wann wächst dieses Kapital auf .300.000.-- an?
 - Welcher Funktionstyp liegt hier vor? Beschreibe die charakteristischen Eigenschaften dieser Funktion.
- [a) $\approx 6,49\%$ b) 222.036,64 c) in 17,6 Jahren ab heute]

LE11

1960 hatte ein Staat 18,5 Mill. Einwohner, 1975 waren es 19,6 Millionen.

- a) Wieviel % betrug in dieser Zeit das jährliche Bevölkerungswachstum? (genaue Angabe!)
- b) Wieviele Einwohner werden es in weiteren 15 Jahren sein?
- c) In welchem Jahr würde bei gleichem Wachstum die 25-Millionen-Grenze erreicht werden?

[a) 1,003858 = 0,39% b) 20,77 Mill. c) nach 78 J. im Jahr 2038]

LE08

Vergleich zweier stetiger Wachstumsprozesse :

- A) In 8 Zeiteinheiten wächst der Wert einer Variablen R von 200 auf 600 durch gleiche Zunahme pro Zeiteinheit.
- B) In 5 Zeiteinheiten wächst der Wert von R von 50 auf 400 durch gleiche prozentuelle Zunahme pro Zeiteinheit.
- a) gib für A) und B) Formeln zur Berechnung von R nach x Zeiteinheiten an.
- b) Bestimme R(50) für beide Varianten.
- c) Vergleiche beide Varianten graphisch im Intervall [0;8].
- d) Bestimme graphisch und durch Rechnung, für welches x die Werte von R gleich sind.

LE18

1975 betrug ein Kapital 350.000,--. Bis 1990 war es bei gleichbleibender jährlicher Verzinsung auf 965.661,-- angewachsen.

- a) Berechne den jährlichen Zinssatz.
 - b) Wann wird es auf 1,500.000,-- angewachsen sein ?
 - c) In welchem Zeitraum verdoppelt sich ein Kapital bei einem Zinssatz von 4.5% p.a.
- [7%, 21,5 Jahre, 15,7 Jahre]

LE01

Das Kohlenstoffisotop C-14 zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5730 Jahren.

- a) Berechne λ im Zerfallsgesetz $C(t) = C_0 \cdot e^{-\lambda t}$.
 - b) Ein aufgefundenes Skelett enthält nur noch 5% des in einem lebenden Organismus vorhandenen C-14-Anteils. Wann ist der Organismus abgestorben?
 - c) Wie viel % einer vorhandenen C-14-Menge zerfallen in 100 Jahren?
- [$\lambda = 0,000121$, 24 758 Jahre, 1,2%]

LE24

Von einer Menge Radium sind nach 100 Jahren noch 95,8% vorhanden.

- a) Berechne λ im Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.
 - b) Berechne die Halbwertszeit von Radium.
- [$\lambda = 0.000$, 1615 Jahre]

LE29 Tomatenpflanzen werden mit einem Schädlingsbekämpfungsmittel gespritzt, welches eine Halbwertszeit von 14 Tagen hat. Bei einer Tomatenkultur werden 0,7g des Mittels in verdünnter Form versprüht.

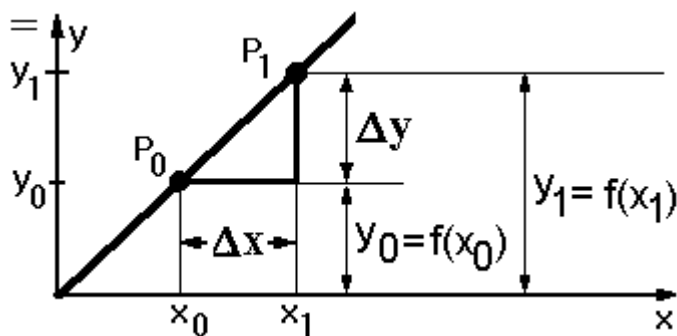
- a) Stellen Sie das Zerfallsgesetz auf und berechnen Sie die Restmenge nach 10 Tagen.
 - b) Die Tomaten dürfen erst in den Handel kommen, wenn die Pflanzen den Wirkstoff bis auf 0,05g abgebaut haben. Am wievielten Tag nach der Behandlung ist dies der Fall?
- [a) $\lambda=0,0495$, $S(10)= 0,427g$, b) nach 53,3 $\approx$ 54 Tagen]

K. Differentialrechnung

1. Herleitung des Differenzen- und des Differentialquotienten

Das Grundproblem der Differentialrechnung ist die Berechnung der Steigung in einem beliebigen Punkt P_0 .

Die Steigung k einer Geraden bestimmt man ohne Differentialrechnung wie bereits erarbeitet:



$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

Beispiel

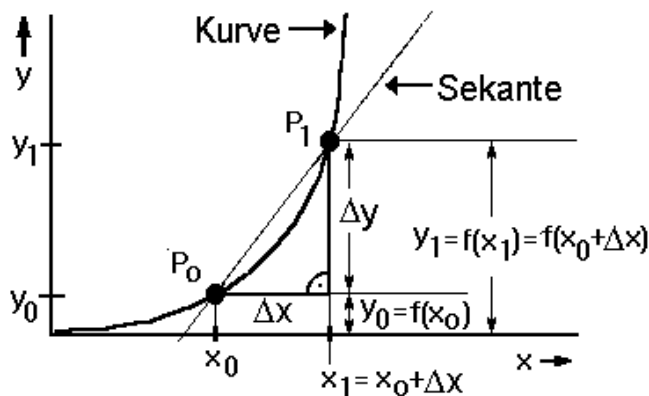
Gegeben sei die nachfolgende Gerade, von der zwei Punkte bekannt seien: Der Punkt P_0 mit der Koordinate $(15/11)$ und der Punkt P_1 mit der Koordinate $(33/20)$.

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{20 - 11}{33 - 15} = \frac{9}{18} = \mathbf{0.5}$$

Weitere Formeln für die Steigung einer Geraden:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Sekante: Eine Sekante ist eine Gerade, die zwei Punkte P_0 und P_1 einer Kurve verbindet, d.h., sie schneidet die Kurve!!!



Sekantensteigung:

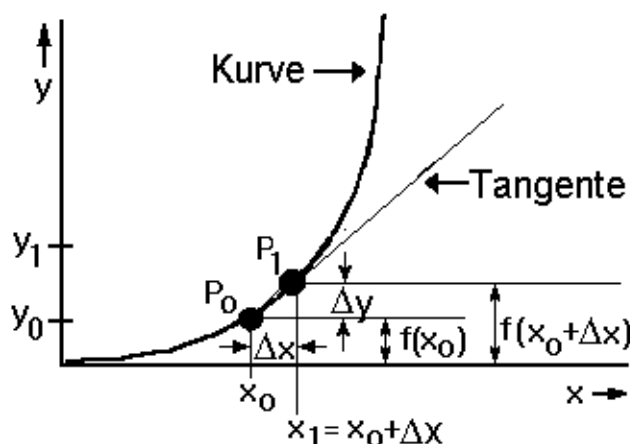
Da eine Sekante formal nichts anderes als eine Gerade ist, berechnet man die Sekantensteigung k_s mit den Formeln "Steigung einer Geraden":

$$k_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Man nennt diese Formel auch den **DIFFERENZENQUOTIENT**: Differenz der Funktionswerte durch die Differenz der Argumente. = DURCHSCHNITTliche ÄNDERUNG DES FUNKTIONSWERTES IM BEREICH $x_0 - x_1$!

Tangente: Rückt der Punkt P_1 unendlich nahe an P_0 , so wird aus der Sekante eine Tangente.

Wichtig: Die Tangente hat im Punkt P_0 die gleiche Steigung wie die Kurve.



Tangentensteigung:

Die Tangentensteigung ist der "Limes" der Sekantensteigung = **DIFFERENTIALQUOTIENT** = ÄNDERUNGSRATE IM PUNKT x_0

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

1 konkretes Beispiel: Tangentensteigung der Funktion $y=x^2$

Im 1. Teil haben wir eine Formel für die Tangentensteigung k_t im Punkt x_0 hergeleitet. Aus dieser allgemeinen Formel (gilt für alle Funktionen) kann man Formeln für die Tangentensteigung k_t für jede konkrete Funktion herleiten, z.B. für die Funktion $y=x^2$:

Die Herleitung

Am Ende des vorigen Kapitels hatten wir eine Formel für die Tangentensteigung k_t im Punkt x_0 hergeleitet:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Wie gesagt, wollen wir nun daraus die Steigung der Funktion $y=x^2$ bestimmen. Der Funktionswert f an der Stelle x_0 ist dann x_0^2 , der Funktionswert f an der Stelle $(x_0 + \Delta x)$ ist $(x_0 + \Delta x)^2$:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - (x_0)^2}{\Delta x}$$

Nun vereinfachen wir den Zähler des Bruches. Den Term $(x_0 + \Delta x)^2$ kann man ausmultiplizieren:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

Der erste und der letzte Summand heben sich auf:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$

Im Zähler heben wir Δx heraus, und kürzen mit dem Nenner:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x (2 x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\Delta x} (2 x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}}$$

Nun bilden wir den Grenzwert (limes) für Δx gegen 0:

$$k_t = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0$$

Die Funktion (Kurve) $y=x^2$ hat an der Stelle x_0 die Steigung $m_t = 2x_0$:

$y = x^2 \Rightarrow k_t = 2 \cdot x_0$

Wozu braucht man jetzt diese Formel?

Mit dieser Formel für k_t kann ich nun für jeden x-Wert x_0 die Steigung ausrechnen. D.h., ich kann an jeder Stelle die Steigung der Funktion berechnen!!

Das Beispiel

Wie gesagt sei die Funktion $y=x^2$ gegeben. Gesucht sei die Steigung im Punkt $P = (1.5/f(1.5)) = (1.5/2.25)$.

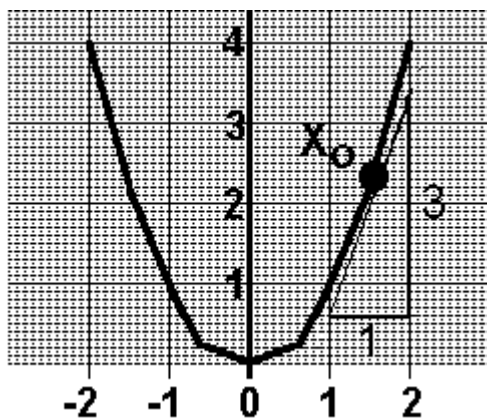
Wir nehmen die Formel und setzen ein:

$$k_t = 2 \cdot x_0 = 2 \cdot 1.5 = 3$$

Die Steigung der Funktion $y=x^2$ im Punkt $(1.5/2.25)$ hat den Wert 3.

Das Bild zum Beispiel

Im Bild ist der Punkt $x_0=(1.5/2.25)$ eingezeichnet und die Tangente an diesen Punkt, die die Steigung 3 hat:



D.h.: Sowohl die Tangente als auch die Funktion hat in diesem Punkt die Steigung 3!!!

Das Berechnen der Steigung ist ein wichtiger Vorgang, den man in der Physik und in der Wirtschaft in vielen Berechnungen einsetzen muss.

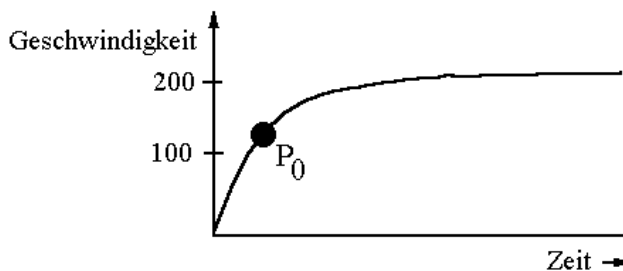
Ableitung und Differentialquotient

Wir haben eine Formel entwickelt, mit der man die Kurven- bzw. Tangentensteigung in einem beliebigen Punkt x_0 berechnen kann.

Eine Kurve hat aber nicht immer nur eine rein geometrische Bedeutung. Oft beschreibt man mit einer Kurve die Abhängigkeit zweier (z.B. physikalischer) Größen.

Als Beispiel diene eine Kurve, die eine Geschwindigkeit-Zeit- Funktion wiedergibt.

Im Bild sehen wir eine Kurve, die den Beschleunigungsvorgang eines Auto von 0 auf 200km/h darstellt:



Der Kurvensteigung (im Punkt P_0) entspricht dann physikalisch die Zunahme der Geschwindigkeit in P_0 , also die Beschleunigung. **Wenn wir also die Kurvensteigung berechnen, berechnen wir in Wirklichkeit die physikalische Größe "Beschleunigung".**

Deshalb ist es nötig, dem Begriff Kurvensteigung einen allgemeineren Namen zu geben. Anstatt Kurvensteigung in P_0 sagt man Ableitung in P_0 oder Differentialquotient in P_0 .

Den Vorgang der Berechnung der Ableitung nennt man „Ableiten“ oder „Differenzieren“.

Schreib- und Sprechweisen

Wie gesagt wollen wir ab jetzt nicht mehr von der Tangentensteigung sprechen, sondern von der Ableitung (bzw. dem Differentialquotient).

Folglich dürfen wir auch nicht mehr k_t schreiben, sondern wir schreiben ab jetzt (für die Ableitung bzw. Differentialquotienten):

$$f'(x_0) \quad \text{oder} \quad y'(x_0) \quad \text{oder} \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$$

Und so wird die Ableitung (der Differentialquotient) ausgesprochen:

$f'(x_0)$	wird gesprochen:	f-Strich-von-x-null
$y'(x_0)$	wird gesprochen:	y-Strich-von-x-null
$\left. \frac{dy}{dx} \right _{x=x_0}$	wird gesprochen:	d-y-nach-d-x für-x-gleich-x-null

2. Rechenregeln für das Differenzieren

Bis jetzt haben wir nur die Ableitung der Funktion $y=x^2$ kennengelernt. Jetzt geht's um die Ableitung der Funktion $y=x^n$ mit $n \in \mathbb{Q}$.

a. Potenzregel

$$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

für $n \in \mathbb{Q}$ gegeben

Insbesondere: $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$

Beispiel:

Gegeben: Die Funktion $f(x) = x^7$

Gesucht: 1. Die Ableitung $f'(x)$ 2. Die Ableitung an der Stelle $x_0=1$

Lösung: Zur Lösung benutzt man die Potenzregel:

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} = 7 \cdot x^{7-1} = 7 \cdot x^6$$

Nun bestimmen wir die Ableitung an der Stelle $x_0=1$:

$$f'(x_0) = 7 \cdot (x_0)^6 = 7 \cdot 1^6 = 7$$

b. Konstantenregel

Ist eine konstante Funktion gegeben, d.h., sie besteht nur aus einer Zahl, dann gilt:

$$f(x) = c \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0, \quad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

Gegeben: Die Funktion $f(x) = 5$

Gesucht: 1. Die Ableitung $f'(x)$ 2. Die Ableitung an der Stelle $x_0=1$

Lösung:

$$f'(x) = 0$$

Nun bestimmen wir die Ableitung an der Stelle $x_0=1$:

$$f'(x_0) = 0$$

c. Faktorenregel (Regel vom konstanten Faktor)

Sind f und g reelle Funktionen mit den Ableitungen f' und g' und ist c eine reelle Zahl, dann gilt:

$$g(x) = c \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad g'(x) = c \cdot f'(x), \quad c \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

Gegeben: Die Funktion $f(x) = 4x^5$

Gesucht: 1. Die Ableitung $f'(x)$ 2. Die Ableitung an der Stelle $x_0=1/2$

Lösung:

$$f'(x) = 4 \cdot 5 x^4 = 20 x^4$$

Nun bestimmen wir die Ableitung an der Stelle $x_0=1/2$:

$$f'(x_0) = 20 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$

d. Summenregel:

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x) + \dots \Rightarrow f'(x) = g_1'(x) + g_2'(x) + \dots$$

Erläuterung der Formel

$f(x)$ ist die Funktion, $f'(x)$ ist die Ableitungsfunktion dazu. Die Funktion $f(x)$ wird also abgeleitet, indem jeder Summand einzeln abgeleitet wird.

Beispiel:

Gegeben: Die Funktion $f(x) = x^2 + 3x - 4$

Gesucht: 1. Die Ableitung $f'(x)$

2. Die Ableitung an der Stelle $x_0 = -1$

Lösung: Zur Lösung benutzt man die Potenzregel, die Faktorenregel und die Konstantenregel:

$$f'(x) = 2 \cdot x^{2-1} + 3 \cdot x^{1-1} = 2 \cdot x + 3$$

Nun bestimmen wir die Ableitung an der Stelle $x_0 = -1$:

$$f'(x_0) = 2 \cdot (x_0) + 3 = 2 \cdot (-1) + 3 = 1$$

= Steigung der Tangente in $x_0 = -1$

e. Produktregel:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Beispiel:

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^3 + 1)$$

$$u(x) = x^2 - 4 \Rightarrow u'(x) = 2x$$

$$v(x) = x^3 + 1 \Rightarrow v'(x) = 3x^2$$

$$f'(x) = 2x(x^3 + 1) + (x^2 - 4)3x^2$$

$$f'(x) = 2x^4 + 2x + 3x^4 - 12x^2$$

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^2 + 2x$$

f. Quotientenregel:

Hier wird der gleiche Trick wie bei der Produktregel angewendet:

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3 - x}{1 + x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-1(1 + x^2) - (3 - x)2x}{(1 + x^2)^2}$$

g. Kettenregel:

$h(x)=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad h'(x)=f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$g'(x)$ = „innere Ableitung“

Beispiel:

$$f(x) = (2x - 4)^3$$

$$f'(x) = 3 \cdot (2x - 4)^2 \cdot 2 = 6 \cdot (2x - 4)^2$$

Übungsbeispiele Differenzieren

11.) Ermitteln Sie die Ableitung von:

a) $y = 3x + 2$

b) $y = -2x + 5$

c) $y = 5(x - 3)$

d) $y = 3x^3$

e) $y = \frac{2x-4}{3}$

f) $y = 3 + 0,2x$

g) $y = x^{125}$

h) $y = x^2 - 3x + 2$

12.) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion mit Hilfe des Differentialquotienten:

a) $f(x) = 2x^2 - 3x + 7$

b) $y = f(x) = x^2 - 1$

c) $f: x \rightarrow -2x+4$

d) $y = x^3 + 4$

13.) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion auf 2 Arten und bestimmen Sie $f'(-1)=?$:

a) $f(x) = x^2(2x-3)$

b) $y = f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + 4)$

c) $y = 2x^3(x^2 + 5x - 1)$

14.) Ermitteln Sie f' und berechnen Sie $f'(x_0)$!

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 8; \quad x_0=2$

b) $y = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 5; \quad x_0=-1$

c) $y = f(x) = -3x^{10} - 3x^7 + 3x^2 - 2; \quad x_0=0$

d) $y = f(x) = -\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - 3x^2 + x; \quad x_0=1$

15.) Ermitteln Sie die erste Ableitung f' der folgenden durch ihre Funktionsgleichung gegebenen Funktionen:

a) $y = 3x^5 + 6x^4 + 7x + 1$

b) $y = 9x^7 + 3x^2 + 12x + 3$

c) $y = (x+3)(x-4)$

d) $y = (x+2)(x^2 - x + 1)$

e) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{4}{x^5} + 6$

f) $y = \frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^2} + \frac{12}{x} - 7$

g) $y = \sqrt[5]{x^4}$

h) $y = \frac{3}{2 \cdot \sqrt[7]{x^5}}$

i) $y = 3 \cdot x^{-\frac{3}{7}}$

j) $y = -\frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x}$

16.) Ermitteln Sie f' und berechnen Sie $f'(x_0)$!

a) $y = (9x^2 + 5)(2x^2 - 4) - (3x + 4)(6x - 5); \quad x_0=-1$

b) $y = (5x^2 + 3)(2x^7 + 3) - (3x^5 + 8)(6x^4 - 1); \quad x_0=-1$

17.) Berechnen Sie die erste Ableitung $y'=f'(x)$ der folgenden Funktionen unter Verwendung der Quotientenregel und geben Sie die Definitionsmenge dieser Funktion an!

a) $y = \frac{1}{x^2}$

b) $y = \frac{1}{1+x}$

c) $y = \frac{1}{1-x}$

d) $y = \frac{1}{1+x^2}$

i) $y = \frac{x}{2x-5}$

j) $y = \frac{x}{3x+7}$

k) $y = \frac{3x}{2x-10}$

l) $y = \frac{x+1}{x-1}$

m) $y = \frac{1-x}{1+x}$

n) $y = \frac{2x-5}{7x+4}$

o) $y = \frac{3x-8}{7-4x}$

p) $y = \frac{x^2+4x+4}{5x-10}$

18.) Berechnen Sie die erste Ableitung $y'=f'(x)$ der folgenden Funktionen unter Verwendung der Kettenregel!

a) $y = (2x-4)^3$

b) $y = (3x+5)^7$

c) $y = 6 \cdot (4-3x^2)^4$

d) $y = (2x-5x^3)^{\frac{2}{3}}$

e) $y = \sqrt{2x-3}$

f) $y = \sqrt[3]{(3x+5)^2}$

g) $y = \sqrt[4]{(3x^2-8x)^3}$

h) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(5x^2+3x)^2}}$

Übungsblatt Differentialrechnung/Tangenten

20) Wie groß ist der Anstieg der Geraden, die durch die Punkte P und Q gelegt wird?

a) $P(0/2)$, $Q(3/11)$

b) $P(-2/6)$, $Q(3/1)$

21) Berechne die erste Ableitung folgender Funktionen an den gegebenen Stellen x_0 mittels Differenzieren nach Potenz-, Faktoren und Konstantenregel und ermittle in den Aufgaben a) - d) die Gleichung der Tangente in diesem Punkt.

a) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$ $x_0 = -4$ b) $y = f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 2$ $x_0 = 2$

c) $y = f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ $x_0 = 5$ d) $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{11}{4}$ $x_0 = 2$

e) $y = f(x) = 3x + 2$ f) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$

22) Ermittle f' und berechne $f'(x_0)$!

a) $f: x \rightarrow 2x^3 - 5x^2 + 8$ $x_0 = 2$

c) $f: x \rightarrow -3x^{10} - 3x^7 + 3x^2 - 2$ $x_0 = 0$

b) $f: x \rightarrow \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + 5$ $x_0 = -1$

d) $f: x \rightarrow -\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{6}x^4 - 3x^2 + x$ $x_0 = 1$

23) (1) Ermittle die Gleichung der Tangente im Punkt P (a /y) der angegebenen Funktion
(2) Berechne die Koordinaten jenes Punktes von f, in welchem die Steigung der Tangente Null ist!
(3) Prüfe durch die graphische Darstellung der Funktion.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$ a = -3 b) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 3$ a = 4

c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x - 3$ a = 5 d) $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{15}{4}$ a = 0

24) Berechne die Nullstellen und den Extremwert sowie die Tangente t im Punkt P der Kurve mit:

a) $f: y = x^2 - 2$; $P(3/y)$ b) $f: y = x^3$; $P(1/y)$ c) $f: y = (x+2)^2$; $P(0/y)$

25) Bestimme die Gleichung der Tangente t im Punkt A(-2/y) der Kurve $y = (x-2)(x+4)$.

In welchem Punkt hat die Kurve die Steigung Null?

[Lösungen : 20)a) $k=3$ b) $k=-1$ 21)a) $f'(x) = x$, $f'(-4) = -4$, t: $y = -4x-10$ b) $f'(x) = -\frac{1}{2}x + 1$, $f'(2) = 0$, t: $y = 3$ c) $f'(x)=4x-3$, $f'(5)=17$, t: $y=17x-45$ d) $f'(x)=\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $f'(2)=1\frac{1}{2}$, t: $y=1\frac{1}{2}x - 3\frac{3}{4}$ e) $f'(x)=3$ f) $f'(x)=-\frac{1}{2}$ 22)a) $f'(x)=6x^2-10x$; $f'(2)=4$ b) $f'(x)=2x^3-\frac{3}{2}x$; $f'(-1)=-\frac{1}{2}$ c) $f'(x)=-30x^9-21x^6+6x$; $f'(0)=0$ d) $f'(x)=-\frac{10}{3}x^4+\frac{2}{3}x^3-6x+1$; $f'(1)=-7\frac{2}{3}$ 23)a) t(-3): $x+y+6=0$; T(-2/-3 $\frac{1}{2}$) b) t(4): $3x+y=7$; H(-2/4) c) t(5): $6x-4y=37$; T(2/-4) d) t(0): $18x+4y=15$; T(3/-3) 24)a) $N_1(\ominus/0)$, $N_2(-\ominus/0)$, $E(0/-2)$, t: $y=6x-11$ b) $N(0/0)$, $E(0/0)$, t: $y=3x-2$ c) $N(-2/0)$, $E(-2/0)$, t: $y=4x+4$ 25) t: $y=-2x-12$, $E(-1/-9)$]

3. Kurvendiskussion

Bei Kurvendiskussionen wollen wir immer Funktionen analysieren und grafisch darstellen. Damit uns das bei Polynomfunktionen höheren Grades auch gelingt, müssen wir versuchen besondere Punkte zu berechnen. Außerdem muss bestimmtes Verhalten von Funktionen geklärt werden.

a. Nullstellen berechnen: $f(x) = 0$

=Schnittstellen mit der x-Achse

Bsp.: $f(x) = x^2 \Rightarrow N(0/0)$

b. Monotonie von Funktionen

Def.:

Eine Funktion f ist in einem Intervall $[a, b]$ **streng monoton steigend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

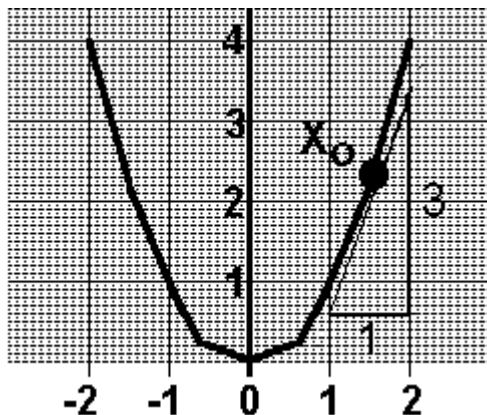
Eine Funktion f ist in einem Intervall $[a, b]$ **streng monoton fallend**, wenn für alle $x_1, x_2 \in [a, b]$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Man kann das Monotonieverhalten aber auch anhand der Ableitung f' feststellen.

Bsp.: Zeichnung von $f(x) = x^2$

- Einschränken, wann Funktion steigt und wann sie fällt



SATZ von der Intervallmonotonie:

Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$, d. h. die **Steigung der Tangente ist positiv** im ganzen Intervall, so ist die Funktion f **streng monoton steigend** im gesamten Intervall.

Genauso:

Ist nämlich $f'(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$, d. h. die **Steigung der Tangente ist negativ** im ganzen Intervall, so ist die Funktion f **streng monoton fallend** im gesamten Intervall.

D.h.: BEISPIEL

In unserem Beispiel ist die Funktion $y = x^2$ bis $x = 0$ streng monoton fallend und ab $x = 0$ streng monoton steigend.

Im Punkt $U(0/0)$ ist die Steigung $f'(0) = 0$, d.h., die Tangente liegt waagrecht.

Bei einer **stetigen Funktion** (keine Sprungstelle, verlaufend) **muss es beim Wechsel von monoton steigend zu monoton fallend einen Punkt geben, wo die Steigung der Funktion gleich 0 ist**

Bei unserem Beispiel ist dies der Punkt $(0/0)$. Dieser Punkt ist zugleich der **tiefste Punkt** in unserer Zeichnung. Alle Punkte neben ihm (ob links oder rechts) haben einen höheren Funktionswert. So einen Punkt nennt man **LOKALES MINIMUM**.

c. Extremstellen (Maxima und Minima von Funktionen): $f'(x) = 0$

= Punkt mit der Steigung Null : $f'(x) = k = 0$

= Punkt, an dem sich das Monotonieverhalten ändert

= eine lokale Extremstelle, d.h., der höchste oder der tiefste Punkt in seiner näheren Umgebung.

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x = 0$$

$$x=0$$

$E(0/0)$ ist eine lokale Extremstelle

Ist das ein Maximum (Hochpunkt) oder ein Minimum (Tiefpunkt)?

Um das zu bestimmen, benötigt man die Krümmungsfunktion (2. Ableitung)!

d. Krümmung und zweite Ableitung

Wie kann ich jetzt aber die Krümmung einer Funktion bestimmen?

Linkskrümmung: Die Steigungen nehmen zu! (Die Steigung der 1. Ableitung ist positiv!)

Rechtskrümmung: Die Steigungen nehmen ab! (Die Steigung der 1. Ableitung ist negativ!)

Die Steigung der Ableitungsfunktion kann man berechnen, indem man die Ableitungsfunktion noch einmal ableitet:

$$(f')'(x) = f''(x)$$

Def.:

$f'(x)$ nennt man **1. Ableitung von $f(x)$** . Sie gibt die **Steigung der Funktion** wieder.

$f''(x)$ nennt man **2. Ableitung von $f(x)$** . Sie gibt die **Krümmung der Funktion** (Steigung der Ableitungsfunktion) wieder.

Def.:

Es sei $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, $f'': A \rightarrow \mathbb{R}$ ihre zweite Ableitung und das Intervall I eine Teilmenge von A .

Die Funktion f heißt in I **linksgekrümmt**, wenn $f''(x) > 0$ für alle inneren Stellen x von I ist.

Die Funktion f heißt in I **rechtsgekrümmt**, wenn $f''(x) < 0$ für alle inneren Stellen x von I .

Jetzt haben wir endlich eine Möglichkeit gefunden, um die Krümmung einer Funktion festzustellen. Dies hat große Wirkung für das Auffinden von Extremstellen!!

SATZ über EXTREMSTELLEN:

Ist $f(x)$ eine reelle Funktion, dann gilt:

a.) Ist $f'(x_{\text{ext}}) = 0$ und $f''(x_{\text{ext}}) < 0$, dann ist $P(x_{\text{ext}} / y_{\text{ext}})$ ein **lokales Maximum (Hochpunkt)** von f !

b.) Ist $f'(x_{\text{ext}}) = 0$ und $f''(x_{\text{ext}}) > 0$, dann ist $P(x_{\text{ext}} / y_{\text{ext}})$ ein **lokales Minimum (Tiefpunkt)** von f !

Ist $f''(x_{\text{ext}}) = 0$, dann ist P keine Extremstelle!!!!!!!

Beispiel:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = 2x = 0$$

$$x=0 \quad \Rightarrow$$

$E(0/0)$ ist eine lokale Extremstelle

$$f''(x) = 2$$

$$f''(0) = 2 > 0$$

$\Rightarrow$

$E(0/0)$ ist eine lokales Minimum (Tiefpunkt): $T(0/0)$

e. Wendepunkte: $f''(x) = 0$

Wendepunkt, wenn sich an dieser Stelle das Krümmungsverhalten ändert.

$$\text{D.h.: } f''(x_w) = 0$$

Zusätzlich muss gelten: $f'''(x_w) \neq 0$

Beispiel:

Berechne die Wendepunkte der Funktion $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$!!

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2 \quad \Rightarrow$$

$$2 = 0 \text{ f. A.}$$

$\Rightarrow$

kein Wendepunkt

$$g'(x) = 3x^2$$

$$g''(x) = 6x \quad \Rightarrow$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

$$g'''(x) = 6$$

$$g'''(0) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$W(0/0)$$

f. Wendetangente:

Oft ist auch noch das Berechnen der Wendetangente gefordert. Dies bedeutet nichts anderes als dass man die Tangente im Wendepunkt aufstellen soll.

g. Zeichnen der Funktion

Mit Hilfe der bestimmten Punkte und eventuell errechneten Punkten aus einer Wertetabelle wird die Funktion gezeichnet.

Kurzzusammenfassung Kurvendiskussion

Gegeben ist $y = f(x)$ = Funktionsgleichung zum Bestimmen der y-Koordinate

1. Berechnen der 3 Ableitungen:

$f'(x)$ = Steigungsfunktion zum Bestimmen der Steigungen
 $f''(x)$ = Krümmungsfunktion zum Bestimmen der Krümmungen
 $f'''(x)$ nur zur Überprüfung, ob ein Wendepunkt vorhanden ist

2. Nullpunkte berechnen: $f(x) = 0$

3. Extrempunkte berechnen: $f'(x) = 0$

Die erhaltenen x-Werte müssen noch in $f''(x)$ eingesetzt werden:

Ist $f''(x_{\text{ext}}) < 0$, dann ist $H(x_{\text{ext}} / y_{\text{ext}})$ ein lokales Maximum (Hochpunkt) von f !

Ist $f''(x_{\text{ext}}) > 0$, dann ist $T(x_{\text{ext}} / y_{\text{ext}})$ ein lokales Minimum (Tiefpunkt) von f !

Ist $f''(x_{\text{ext}}) = 0$, dann ist $P(x_{\text{ext}} / y_{\text{ext}})$ kein Extremwert f !

4. Wendepunkte berechnen: $f''(x) = 0$

Die erhaltenen x-Werte müssen noch in $f'''(x)$ eingesetzt werden:

$f'''(x_w) = 0$, dann ist der Punkt kein Wendepunkt!

5. evtl. Wendetangente: Tangente im Wendepunkt ($t_w: y = kx + d$)

6. Graph: Zeichnen der Funktion

FERTIGES BEISPIEL ZUR KURVENDISKUSSION

Diskutiere die Polynomfunktion $y = f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$ im Intervall $[-5, 4]$!

(1) Ableitungen

$$y' = f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$y''' = f'''(x) = \frac{3}{4}$$

(2) Nullstellen: Bedingung: $f(x) = 0$!

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2 = 0 \quad | \cdot 8$$

$$x^3 - 12x + 16 = 0 \quad (\text{Teiler von } 16!) \rightarrow x_1 = 2$$

Polynomdivision:

$$(x^3 - 12x + 16) : (x - 2) = x^2 + 2x - 8$$

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \rightarrow x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{9}$$

$$x_2 = -4; \quad x_3 = 2$$

Nullpunkte: $N_1(-4/0)$; $N_{2,3}(2/0)$...doppelte Nullstelle!

(3) Extrempunkte: Bedingung: $f'(x) = 0$!

$$y' = f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \quad \left| \quad \underline{f'(x) = 0:} \quad \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} = 0 \quad | \cdot 8 \right.$$

$$3x^2 - 12 = 0 \quad | : 3$$

$$x^2 = 4$$

$$\text{Extremstellen: } x_1 = -2; \quad x_2 = 2$$

Überprüfung zweite Ableitung:

$$f''(x_1) = f''(-2) = \frac{3}{4}(-2) = -\frac{3}{2} \leq 0 \rightarrow \text{Hochpunkt}$$

$$H(-2/f(-2)) \rightarrow H(-2/4)$$

$$f''(x_2) = f''(2) = \frac{3}{4} \cdot 2 = \frac{3}{2} \geq 0 \rightarrow \text{Tiefpunkt}$$

$$T(2/f(2)) \rightarrow T(2/0)$$

(4) Wendepunkte: Bedingung: $f''(x) = 0!$

$$\frac{3}{4}x = 0 \rightarrow \text{Wendestelle: } x_w = 0$$

Überprüfung dritte Ableitung: $f'''(x_w) = f'''(0) = \frac{3}{4} \neq 0$

Funktionswert zur Wendestelle:

$$y_w = f(x_w) = f(0) = \frac{1}{8} \cdot 0 - \frac{3}{2} \cdot 0 + 2 = 2$$

→ Wendepunkt W(0/2)

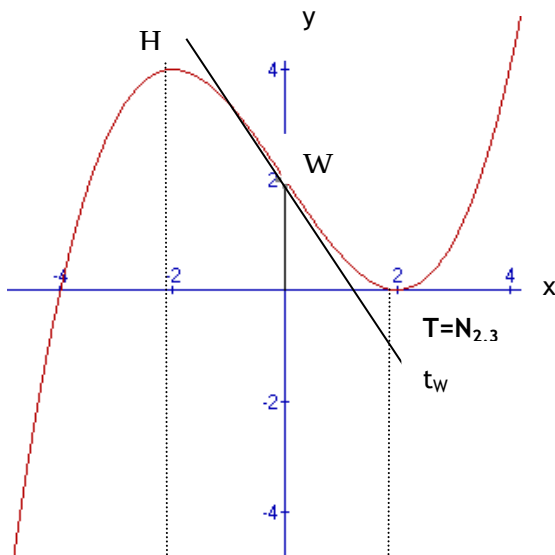
(5) Wendetangente: $t_w: y = kx + d$

$$k = f'(x_w) = f'(0) = \frac{3}{8} \cdot 0^2 - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}$$

W in t_w : $2 = -\frac{3}{2} \cdot 0 + d$

$$d = 2 \rightarrow \underline{t_w: y = -\frac{3}{2}x + 2}$$

(6) Wertetabellen, Graphen von f , f' und f''



x	y
-5	-6,1
-4	0,0
-3	3,1
-2	4,0
-1	3,4
0	2,0
1	0,6
2	0,0
3	0,9
4	4,0

Übungsblatt Kurvendiskussion 1

28) Bestimme Nullstellen und Extrempunkt (Scheitelpunkt) der folgenden Parabeln und zeichne sie in einem Intervall, das um 1 kleiner als die linke und um 1 größer als die rechte Nullstelle ist.

a) $y = x^2 - 4$ b) $y = -3/2 x^2 + 3x + 9/2$ c) $y = 4/5 x^2 - 4x$ d) $y = x^2 - 8x + 7$

29) Berechne in folgenden Funktionen zweiten Grades die Nullstellen, den Extrempunkt (Scheitel) sowie die Steigung im angegebenen Punkt A und zeichne den Graphen der Funktion.

a) $f: x \rightarrow -\frac{x^2}{6} - \frac{2x}{3} + 3$ A(2/y) b) $f: x \rightarrow -\frac{2x^2}{7} + x + 5$ A(7/y)

c) $f: x \rightarrow \frac{x^2}{3} + 4x + 8$ A(-3/y) d) $f: x \rightarrow \frac{x^2}{2} + 3x + 2$ A(-4/y)

30)a) $f: y = x^2 + 1, k=6$ b) $f: y = x^2 - 5x + 2, k=3$ c) $f: y = (x+1)^2, k=-4$

- (1) Bestimme die Nullstellen und Extremwerte der angegebenen Funktionen.
- (2) Wie lauten die Tangentengleichungen im Punkt P(2/y)?
- (3) In welchem Punkt ist die Tangente parallel zur Geraden mit der Steigung k?
- (4) Zeichne den Funktionsgraphen im angegebenen Intervall und markiere die berechneten besonderen Punkte.

31) Bestimme von folgenden Funktionen die Nullstellen, Fixpunkte, Extremwerte und die Tangenten in den Nullstellen. Berechne anschließend in welchem Punkt die Funktion die angegebene Steigung k besitzt und zeichne den Graphen im angegebenen Intervall.

a) $f: y = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{15}{4}$ $k = \frac{1}{2}; [-6, 5]$
 b) $f: y = -\frac{1}{4} x^2 + \frac{5}{2} x - \frac{9}{4}$ $k = -\frac{3}{2}; [0, 11]$
 c) $f: y = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - 3$ $k = \frac{5}{2}; [-4, 4]$

32) Berechne die Nullstellen und Extremwerte folgender Funktionen und zeichne ihren Graphen

a) $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$ b) $f(x) = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x$
 c) $f(x) = -\frac{x^3}{4} + 3x^2 - 8x$ d) $f(x) = \frac{x^3}{2} - 5x^2 + 12x$

[Lösungen: 28)a) $N_1(-2/0), N_2(2/0), S=T(0/-4)$ b) $N_1(-1/0), N_2(3/0), S=H(1/6)$ c) $N_1(0/0), N_2(5/0), S=T(2,5/-5)$ d) $N_1(1/0), N_2(7/0), S=T(4/-9)$ 29)a) $N_1(-6,7/0), N_2(2,7/0), S=H(-2/3,7), k=-4/3$ b) $N_1(6,3/0), N_2(-2,8/0), S=H(1,7/5,8), k=-3$ c) $N_1(-2,5/0), N_2(-9,5/0), S=T(-6/-4), k=2$ d) $N_1(-0,8/0), N_2(-5,2/0), S=T=(-3/-2,5), k=-1$ 30)a) keine N, E(0/1), t: $y=4x-3$, P(3/10) b) $N_1(4,56/0), N_2(0,44/0), E(2,5/-4,25)$, t: $y=-x-2$, P(4/-2) c) $N(-1/0), E(-1/0)$, t: $y=6x-3$, P(-3/4) 31)a) $N_1(-5/0), N_2(3/0), T(-1/-4)$, $t_1: y=-2x-10$, $t_2: y=2x-6$, $F_1(5/5), F_2(-3/-3), P(0/-15/4)$ b) $N_1(1/0), N_2(9/0), H(5/4)$, $t_1: y=2x-2$, $t_2: y=-2x+18$, $F(3/3), P(8/7/4)$ c) $N_1(-3/0), N_2(2/0), T(-1/2/-3/8)$, $t_1: y=-5/2 x-15/2$, $t_2: y=5/2 x-5$, $F_1(3/3), F_2(-2/-2), P(3/3)$ 32)a) $N_1(0/0), N_2(4,8/0), N_3(-1,85/0), H(-1/1,7), T(3/-9)$ b) $N_1(0/0), N_2(1,8/0), N_3(-3,3/0), H(1/1,2), T(-2/-3,3)$ c) $N_1(0/0), N_2(8/0), N_3(4/0), H(6,3/6,2), T(1,7/-6,2)$ d) $N_1(0/0), N_2(4/0), N_3(6/0), H(1,6/8,4), T(5,1/-2,5)$]

Übungsblatt Kurvendiskussion 2

Aufgaben:

Bestimme jeweils Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und die Wendetangente(n).

Zeichne außerdem die Funktionen!

1. $f(x) = x^2 - x - 2$
2. $f(x) = -x^2/2 + 3x - 5/2$
3. $f(x) = -x^4/4 + x^3$
4. $f(x) = x^3/4 - 3x$
5. $f(x) = x^3/6 + x^2$
6. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$
7. $f(x) = x^3 + x/2 - 9$
8. $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x$
9. $f(x) = 1/4(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)$
10. $f(x) = 1/3(-x^3 + 3x^2 + 9x + 5)$
11. $f(x) = 1/4(x^3 - 3x^2 + 20)$
12. $f(x) = 1/2(x^3 - 3x^2 + 4x + 8)$
13. $f(x) = 1/2(x^3 + x^2 - x - 1)$
14. $f(x) = 1/2(x^4 - 6x^2 + 9)$
15. $f(x) = x^4/16 - 3x^2/2 + 5$
16. $f(x) = -x^4/2 + x^2 + 4$
17. $f(x) = x^4/8 - 3x^3/2 + 6x^2 - 8x$
18. $f(x) = 1/12(3x^4 - 22x^3 + 36x^2)$

Lösungen:

1. $N_1 = (-1/0), N_2 = (2/0), T(0,5/-2,25)$
2. $N_1 = (1/0), N_2 = (5/0), H(3/2)$
3. $N_1 = W_1(0/0), N_2(4/0), H(3/6,75), W_2(2/4), t_1: y = 0, t_2: y = 4x - 4$
4. $N_1 = W(0/0), N_{2,3}(\pm\sqrt{12}/0), T(2/-4), H(-2/4), t: y = -3x$
5. $N_1 = T(0/0), N_2(-6/0), H(-4/5^{1/3}), W(-2/2^{2/3}), t: y = -2x - 4/3$
6. $N_1(-1/0), N_2 = T(2/0), H(0/4), W(1/2), t: y = -3x + 5$
7. $N(2/0), W(0/-9), t: y = x/2 - 9$
8. $N(0/0), W(1/2), t: y = 2$
9. $N_1 = T(3/0), N_2(-3/0), H(-1/8), W(1/4), t: y = -3x + 7$
10. $N_1 = T(-1/0), N_2(5/0), H(3/10^{2/3}), W(1/5^{1/3}), t: y = 4x + 4/3$
11. $N(-2/0), H(0/5), T(2/4), W(1/4,5), t: y = -0,75x + 5,25$
12. $N(-1/0), W(1/5), t: y = x/2 + 4,5$
13. $N_1 = H(-1/0), N_2(1/0), T(1/3 / -16/27), W(-1/3 / -8/27), t: y = -2/3x - 14/27$
14. $N_{1,2} = T_{1,2}(\pm\sqrt{3}/0), H(0/4,5), W_{1,2}(\pm1/2), t: y = -/+4x$

4. Umkehraufgaben

Problembeschreibung:

Die Aufgabenstellung ist hier im Vergleich zur Kurvendiskussion umgekehrter Natur. Gegeben ist die **Art der Funktion** in allgemeiner Form ganzrational, gebrochen rational etc.) sowie **spezielle Punkte** der Funktion, eventuell bestimmte **Eigenschaften** derselben. Daraus soll die Funktionsgleichung mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems rekonstruiert werden.

Text	Übersetzung in Gleichung(en)
... verläuft durch den Punkt P(2 6)	$f(2) = 6$
... hat Nullstelle bei $x = 9$	$N(9/0): f(9) = 0$
... schneidet die y-Achse bei 3	$P(0/3): f(0) = 3$
... berührt die x-Achse an der Stelle $x = 5$	$N(5/0): f(5) = 0$ auch ein Extremwert: $f'(5) = 0$
... hat einen Tiefpunkt bei T (2 - 7)	$f(2) = -7$ und $f'(2) = 0$
... hat einen Wendepunkt bei P(- 1 2)	$f(-1) = 2$ und $f''(-1) = 0$
... besitzt im Punkt P(2 - 3) die Steigung 4	$f(2) = -3$ und $f'(2) = 4$
... besitzt an der Stelle $x = - 2$ eine Wendetangente mit der Steigung 1	$f'(-2) = 1$ und Wendepunkt $f''(-2) = 0$
... die Tangente in P (- 1 5) ist parallel zur Geraden $y = 6x$	$f(-1) = 5$ und $f'(-1) = 6$

Beispiel: Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades hat an der Stelle $x=1$ eine Nullstelle und im Punkt $W(3/y_w)$ einen Wendepunkt mit der Wendetangente $t_w: 3x-4y=5$ (Umformung für $t_w: y=3/4x-5/4$).
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung!

Eine allgemeine Polynomfunktion(PF) 3. Grades kann durch folgende Funktionsgleichung angegeben werden:

Funktion: $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

1. Ableitungsfunktion: $y'=f'(x)=3ax^2+2bx+c$

2. Ableitungsfunktion: $y''=f''(x)=6ax+2b$

In dieser Funktionsgleichung treten 4 unbekannte Koeffizienten a, b, c und d auf. Für ihre Berechnung ist daher ein **Gleichungssystem** mit 4 Variablen notwendig, das sich aus den vorgegebenen Bedingungen aus der Aufgabenstellung ergeben muss.

	Angabe	Bedingung	Gleichung
I:	Nullstelle bei $x=1$ $N(1/0)$	für die Nullstelle gilt: $f(x)=0$ $f(1)=0$	$0=a \cdot 1^3+b \cdot 1^2+c \cdot 1+d$ $0=a+b+c+d$
II:	$W(3/y_w) \in t_w$ $y = \frac{3}{4} \cdot 3 - \frac{5}{4}$ $y=1$ $W(3/1)$	$W \in f(x)$ Die Koordinaten des Wendepunktes müssen die Funktionsgleichung erfüllen, d.h. für einen Punkt gilt: $f(x)=y$ $f(x_w)=y_w$ $f(3)=1$	$1=a \cdot 3^3+b \cdot 3^2+c \cdot 3+d$ $1=27a+9b+3c+d$
III:	Wendetangente in $W(3/y_w)$ $t_w: 3x-4y=5$ $-4y=-3x+5$ $y = \frac{3}{4} \cdot x - \frac{5}{4}$ $k_{t_w} = \frac{3}{4}$	für den Anstieg(Steigung) der Wendetangente gilt: $f'(x_w)=k_{t_w}$ $f'(3) = \frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} = 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c$ $\frac{3}{4} = 27a + 6b + c \quad / \cdot 4$ $3 = 108a + 24b + 4c$
IV:	Wendepunkt $W(3/y_w)$	für den Wendepunkt gilt: $f''(x)=0$ $f''(3)=0$	$0=6a \cdot 3 + 2b$ $0=18a+2b$ $0=9a+b$

$$\begin{array}{l} \text{I:} \quad 0 = a + b + c + d \quad / \cdot (-1) \\ \text{II:} \quad 1 = 27a + 9b + 3c + d \\ \text{III:} \quad 3 = 108a + 24b + 4c \\ \text{IV:} \quad 0 = 9a +$$

GELÖSTE UMKEHRAUFGABEN ZUR KURVENDISKUSSION

Bsp. 54.) : Eine Parabel dritter Ordnung hat in den Punkten $E_1(-2/11)$ und $E_2(1/y_2)$ relative Extrema. Ferner geht sie durch den Punkt $P(2/3)$. Wie lautet der Funktionsterm?

Parabel dritter Ordnung: $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$y'' = f''(x) = 6ax + 2b$$

	Angabe	Bedingung	Gleichung
I:	$E_1(-2/11)$	$f(-2)=11$	$11 = -8a + 4b - 2c + d$
II:	$P(2/3)$	$f(2)=3$	$3 = 8a + 4b + 2c + d$
III:	E_1 Extremum	$f'(-2)=0$	$0 = 12a - 4b + c$
IV:	E_2 Extremum	$f'(1)=0$	$0 = 3a + 2b + c$

$$\begin{array}{rcl} 11 = -8a + 4b - 2c + d & / \cdot (-1) & \\ 3 = 8a + 4b + 2c + d & & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{rcl} 0 = 12a - 4b + c & & \\ 0 = 3a + 2b + c & / \cdot 2 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +$$

$$\begin{array}{rcl} -8 = 16a + 4c & / \cdot 3 & \\ 0 = 18a + 3c & / \cdot (-4) & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} +$$

$$-24 = -24a$$

$$\underline{a=1}$$

$$b: 0 = 3 + 2b - 6$$

$$\underline{b=3/2}$$

$$c: 0 = 18 + 3c$$

$$\underline{c=-6}$$

$$L: \underline{y=f(x)=x^3+3/2x^2-6x+1}$$

$$\begin{array}{rcl} 5 & = & 8a+4b+2c \\ 1/2 & = & 12a+4b+c \quad / \cdot (-2) \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 5 \\ 1/2 \end{array}} \right\} + \\ 0 & = & 12a+2b \quad / :2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 & = & -16a - 4b \\ 0 & = & 24a + 4b \quad \left. \vphantom{\begin{array}{r} 4 \\ 0 \end{array}} \right\} + \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} 4 & = & 8a \\ a & = & 1/2 \\ c: 1/2 & = & 6-12+c \\ c & = & 13/2 \end{array}$$

$$b: 0 = 12 + 4b$$

$$\underline{b = -3}$$

$$\underline{L: y = f(x) = x^3/2 - 3x^2 + 13x/2}$$

.....

Bsp. 55.): Eine durch den Koordinatenursprung gehende Polynomfunktion vierten Grades geht durch den Punkt $P_1(-2/12)$ und $P_2(2/y_2)$. P_2 ist ein Wendepunkt. An der Stelle $x_3 = -1$ besitzt die Funktion eine zur x-Achse parallele Wendetangente.

$$\begin{array}{l} \text{PF vierten Grades: } y = f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \\ y' = f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\ y'' = f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c \end{array}$$

	Angabe	Bedingung	Gleichung
I:	$O(0/0)$	$f(0)=0$	$0=e$
II:	$P_1(-2/12)$	$f(-2)=12$	$12=16a-8b+4c-2d+e$
III:	Steigung der t_w an der Stelle $x_3 = -1$ ist 0, da parallel zur x-Achse	$f'(-1)=0$	$0=-4a+3b-2c+d$
IV:	$x_3 = -1$ ist eine Wendepunktstelle, da Wendetangente vorgegeben ist.	$f''(-1)=0$	$0=12a-6b+2c$
V:	P_2 Wendepunkt	$f''(2)=0$	$0=48a+12b+2c$

$$\underline{0=e}$$

$$\begin{array}{rcl} 12 & = & 16a-8b+4c-2d \\ 0 & = & -4a+3b-2c+d$$

.....

Bsp. 45.): Eine Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt $P(0/5/3)$ die Steigung $k = 3$ und im Punkt $(-1/0)$ einen Extremwert. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung!

PF dritten Grades: $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

$$y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\underline{y'' = f''(x) = 6ax + 2b}$$

	Angabe	Bedingung	Gleichung
I:	$P(0/5/3)$	$f(0)=5/3$	$5/3=d$
II:	$E(-1/0)$	$f(-1)=0$	$0 = -a+b-c+d$
III:	Steigung im Punkt P	$f'(0)=3$	$3=c$
IV:	Eigenschaft Extrempunkt	$f'(-1)=0$	$0 = 3a-2b+c$

$$\underline{5/3=d}$$

$$0 = -a+b-c+d$$

$$\underline{3=c}$$

$$0 = 3a-2b+c$$

$$\begin{array}{l} 4/3 = -a+b \quad / \cdot 2 \\ -3 = 3a-2b \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} 4/3 = -a+b \\ -3 = 3a-2b \end{array}} \right\} +$$

$$\underline{a = -1/3}$$

$$\text{b: } -3 = -1-2b$$

$$\underline{b=1}$$

$$\underline{L : y=f(x) = -x^3/3 + x^2 + 3x + 5/3}$$

Übungsblatt Umkehraufgaben 1

- 33) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^2 + c$ geht durch den Punkt $P(2/2)$ und hat in diesem Punkt die Steigung $k=1$. Bestimme den Funktionsterm.
- 34) Gegeben ist eine Funktion 2. Grades der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$. Bestimme die Funktionsgleichung, wenn man weiß, dass die Funktion durch die Punkte $A(-5/3)$ und $B(-4/0)$ geht und in B die Steigung $k = -2$ hat.
- 35) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $A(-2/21)$, $B(0/5)$, $C(2/5)$. Bestimme den Funktionsterm.
- 36) Bestimme die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$, die durch den Punkt $P(1/2)$ geht und in $E(0/3/2)$ einen Extremwert besitzt.
- 37) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^2 + bx + c$ geht durch die Punkte $P(-2/7)$ und $Q(1/16)$ und hat im Punkt Q die Steigung $k=0$. Bestimme den Funktionsterm.

Bestimme in den Beispielen 38 - 44 den vollständigen Funktionsterm und diskutiere die Funktion:

- 38) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^3 + bx^2$ hat den Extrempunkt $E(4/4)$.
- 39) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx$ hat den Wendepunkt $W(-1/-2)$. Die Steigung der Wendetangente beträgt $k_{tw} = 1$.
- 40) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx$ geht durch $P(-1/4)$ und hat den Extremwert $E(2/4)$.
- 41) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx$ geht durch $P(2/-2)$, hat an der Stelle 1 einen Extrempunkt und an der Stelle -1 einen Wendepunkt.
- 42) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow -1/3 x^3 + ax^2 - 4/3$ hat den Wendepunkt mit der x-Koordinate (=Abszisse) 1.
- 43) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat in $0(0/0)$ einen Extrempunkt und in $W(1/2/3)$ den Wendepunkt. Zeichne den Graphen in $[-1;4]$
- 44) Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^4 + bx^3 - x^2$ hat den Wendepunkt $W(2/-4)$.
- 45) Bestimme die lokalen Extremwerte, die Wendepunkte und die Wendetangente (außer bei Bsp.c) der folgenden Funktionen:
- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $f(x) = -1/8 (x^3 - 3x^2 - 9x - 5)$ | b) $f(x) = 1/5 (x^3 - 12x + 5)$ |
| c) $f(x) = -1/2 (x^4 - 8x^2)$ | d) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2 + 17$ |

[Lösungen: 33) $f: y = x^2/4 + 1$ 34) x^2+6x+8 35) $f: y=2x^2-4x+5$ 36) $f(x) = 1/2 x^2+1$ 37) $f: y = -x^2+2x+15$
 38) $y = -1/8x^3 + 3/4 x^2$, $N_1(0/0)$, $N_2(6/0)$, $T($

Übungsblatt Umkehraufgaben 2

43. Eine Funktion 2. Grades geht durch die Punkte A(2/4) und B(-4/7); in A hat sie die Steigung 1.
) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung! //
44. Der Graph einer Funktion 3. Grades hat den Hochpunkt H(0/5) und den Wendepunkt W(1/3).
) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung! //
45. Eine Polynomfunktion 3. Grades hat im Punkt (0/ $\frac{5}{3}$) die Steigung $k = 3$ und im Punkt (-1/0) einen
) Extremwert. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung! //
46. Der Graph einer Funktion 3. Grades berührt die x-Achse im Punkt (2/0) und hat bei (1/3) einen
) Wendepunkt. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung! //
47. Der Graph einer Funktion 3. Grades geht durch den Koordinatenursprung. Der Wendepunkt hat die
) Koordinaten (2/5), und die Wendetangente hat die Steigung $\frac{1}{2}$. Wie lautet der Funktionsterm?
 Diskutieren Sie anschließend die Funktion! //
48. Eine Funktion 4. Grades hat im Koordinatenursprung einen Wendepunkt mit der Steigung -2. Im
) Punkt (2/0) beträgt die Steigung 12. //
49. Der Graph einer Funktion 3. Grades hat bei $x = 4$ eine Nullstelle und bei $x = 2$ einen Wendepunkt.
) Die Gleichung der Wendetangente lautet: $y = 3x - 4$. //
50. Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch die Punkte A(3/0), B(4/ $\frac{5}{6}$), C(-4/ $-\frac{7}{2}$)
) und schneidet die x-Achse in A unter einem Winkel von 30° .
 (Hinweis: Die Steigung der Kurve im Punkt A ergibt sich aus dem folgenden Zusammenhang: $k=f'(3)=\tan 30^\circ=\frac{1}{2}$)
 Berechnen Sie die Koeffizienten a, b, c, d!
 Wie lauten die weiteren Nullstellen? //
51. Eine Polynomfunktion dritten Grades hat den Wendepunkt W(1/-1) und im Punkt P(2/-1) den
) Anstieg $k=2$. Wie lauten die Koeffizienten bzw. der Funktionsterm? //
52. Eine Funktion dritten Grades geht durch den Punkt P(2/-2) und Q(4/8). Im Punkt P beträgt der
) Anstieg der Tangente -1, während die zweite Ableitung dort den Wert 2 hat. //
53. Eine ganzrationale Funktion dritten Grades geht durch den Punkt P(2/-9) und hat den Hochpunkt
) H(-2/7), in welchem die zweite Ableitung den Wert -18 annimmt. //
54. Eine Parabel dritter Ordnung hat in den Punkten $E_1(-2/11)$ und $E_2(1/y_2)$ relative Extrema. Ferner
) geht sie durch den Punkt P(4/-9). //
55. Eine durch den Koordinatenursprung gehende Polynomfunktion vierten Grades geht durch den
) Punkt $P_1(-2/12)$ und $P_2(2/y_2)$. P_2 ist ein Wendepunkt. An der Stelle $x_3=-1$ besitzt die Funktion eine
 zur x-Achse parallele Wendetangente. //
56. Eine Parabel vierter Ordnung geht durch die Punkte P(-1/9) und Q(1/1) und berührt die x-Achse an
) der Stelle $x_3=2$. Q ist ein relatives Extremum. //
57. Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades besitzt den Tiefpunkt T(0/0) und den Wendepunkt
) W(1/1) mit der zur x-Achse parallelen Tangente. Diskutieren Sie die Funktion! //

Ad 43.) $y=f(x) = x^2/4 + 3$; Ad 44.) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; Ad 45.) $f(x) = -x^3/3 + x^2 + 3x + 5/3$;

5. Extremwertaufgaben

= Anwendung der Differentialrechnung in der Praxis

Lösungsschema allgemein

- a. Fertigen Sie ggfs. eine **Skizze** mit den entsprechenden Größen an.
- b. Finde eine Formel für die zu optimierende Größe (die sog. **Zielfunktion, Hauptbedingung**)!
- c. Falls die Zielfunktion (Hauptbedingung) von mehreren Variablen abhängt, so suche Gleichungen (die sog. **Nebenbedingungen**), die die Anzahl der Variablen in der Zielfunktion reduzieren, bis möglichst nur noch eine übrig bleibt!
- d. Setze die Nebenbedingungen in die Hauptbedingung ein!
- e. Bestimme den **absoluten Extremwert** der Zielfunktion für die verbliebene Variable durch Einsetzen in die Zielfunktion. Die Kandidaten sind die durch Ableitung bestimmten Extremwerte (relative Extrema) und die Randwerte des zulässigen Bereiches!
- f. Überprüfe mit der 2. Ableitung auf Minimum oder Maximum!
- g. Berechne **alle übrigen Größen**!
- h. Formuliere die Lösung in einem **Antwortsatz**!

Arten von Nebenbedingungen

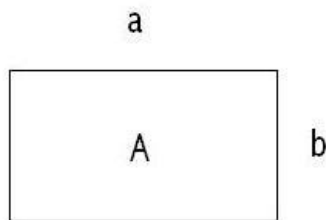
- a. Wert ist bekannt, mit dem man eine Formel aufstellen kann.
- b. Satz des Pythagoras
- c. Ähnliche Dreiecke: Strahlensatz

Beispiel: Einzäunung mit möglichst großem Flächeninhalt

Jemand besitzt 100 m Drahtzaun und möchte damit einen rechteckigen Weideplatz formen. Wie groß müssen die Seitenlängen des Rechtecks gewählt werden, damit dessen Flächeninhalt möglichst groß wird? Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

- a. Der Umfang des Rechtecks muss 100 m betragen, die Seitenlängen dürfen aber variieren. Bei vorgegebener Länge einer Seite ist auch die Länge der anderen Seite festgelegt und kann nicht mehr beliebig gewählt werden (da der Umfang 100 sein muss). Je größer eine Seite ist, desto kleiner muss die andere sein. D.h., eine Seite hängt von der anderen ab (Funktion!). Im Extremfall hat die eine Seite die Länge 0, die andere Seite die Länge 50 und das Rechteck hat den Flächeninhalt 0.

b.



- c. Zielfunktion/Hauptbedingung:

$$A(a,b) = a \cdot b$$

- d. Nebenbedingung:

$$100 = 2a + 2b$$

$$a = \frac{100 - 2b}{2} = 50 - b$$

Die Nebenbedingung kann nun in die Zielfunktion eingesetzt werden. Damit ist die Zielfunktion nur noch von einer Variablen abhängig:

$$A(b) = (50 - b) \cdot b = 50b - b^2$$

- e. Da ein Maximum gesucht wird: 1. Ableitung der Zielfunktion gleich Null setzen!

$$A'(b) = 50 - 2b = 0$$

$$50 = 2b$$

$$\underline{25m = b}$$

$$A(0) = (50 - 0) \cdot 0 = 0 = (50 - 50) \cdot 50 = A(50)$$

$$A(25) = (50 - 25) \cdot 25 = \underline{625m^2}$$

Nun muss noch überprüft werden, ob die Lösung ein **Maximum** oder ein **Minimum** ergibt:

$$A''(b) = -2 < 0$$

Daher ist jede Lösung für b ein Maximum!

- f. Berechnen von a:

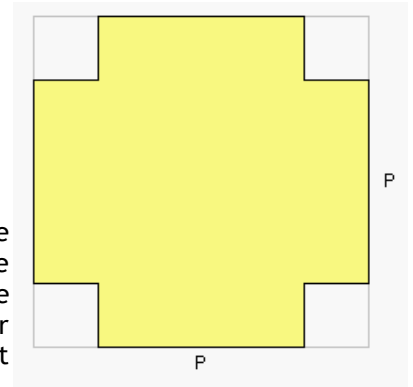
$$a = 50 - b = 50 - 25 = \underline{25m}$$

- g. Der maximale Flächeninhalt eines Rechtecks bei einem vorgegebenen Umfang $u = 100m$ wird bei einem Quadrat der Seitenlänge $a = 25m$ erreicht. Der Flächeninhalt beträgt dann $625 m^2$.

2. Beispiel:

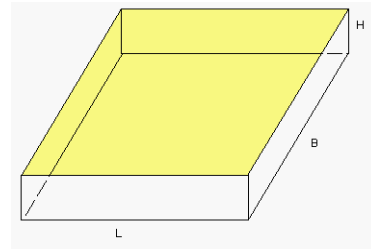
Aufgabenstellung:

Aus einem quadratischen Stück Pappe soll eine nach oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu werden aus den 4 Ecken Quadrate ausgeschnitten. Die Pappe ist 20 cm lang und breit. Wie müssen die Quadrate ausgeschnitten werden, damit das Fassungsvermögen der Schachtel möglich groß ist? Klebeflächen sollen nicht berücksichtigt werden.

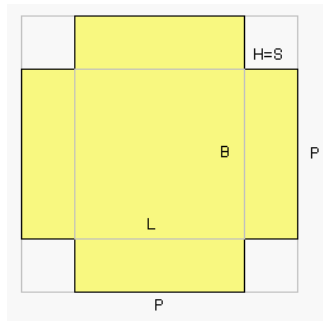


a. Übersetzung:

Die offene Schachtel ist ein oben offener Quader. Gesucht ist das absolute Maximum des Quadervolumens!



b. SKIZZE:



c. Zielfunktion:

Für das Volumen V eines Quaders gilt die Formel: $V(L,B,H) = \text{Länge } L \cdot \text{Breite } B \cdot \text{Höhe } H$

d. Nebenbedingung:

Die Zielfunktion hängt von zwei Größen ab: L, H (da $L = B$)

$$V(L,H) = L^2 \cdot H$$

Ist S die Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate, dann ist $L = 20 - 2S$ und $H = S$

Jetzt hängt das Volumen V nur noch von der Größe S ab:

$$V(S) = (20-2S)(20-2S)S$$

e. relativer Extremwert:

$V(S) = (20-2S)(20-2S)S = 4S^3 - 80S^2 + 400S$ hat im gesamten Definitionsbereich ein relatives Maximum bei $S_1 = 20/6 = 10/3$ und ein relatives Minimum bei $S_2 = 10$. (Ableiten und Null setzen!)

Alle Extrema liegen innerhalb des zulässigen Bereichs $[0 \mid 10]$.

f. Größen berechnen:

$$S = 10/3 \text{ cm}$$

$$L = 20 - 2 \cdot 10/3 \text{ cm} = 40/3 \text{ cm}$$

$$H = 10/3 \text{ cm}$$

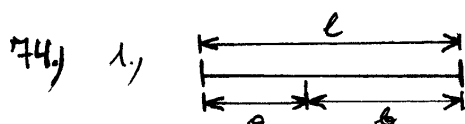
$$V = 16000/27 \text{ cm}^3$$

h. Lösung:

Die Schachtel mit dem maximalen Fassungsvermögen hat die Länge $L = 40/3 \text{ cm}$, die Höhe $H = 10/3 \text{ cm}$ und das Volumen $16000/27 \text{ cm}^3$.

Um diese Schachtel herzustellen, müssen 4 Quadrate mit der Seitenlänge $S = 10/3 \text{ cm}$ ausgeschnitten werden.

Extremwertaufgaben mit Lösungen:



2.) HB: $P = a \cdot b \Rightarrow \max$

3.) NB: $l = a + b$ (Formel)

4.) $b = l - a$ umgeformte NB

4.) $P(a) = a(l - a)$

$P(a) = l \cdot a - a^2$

5.) keine Vereinfachung notwendig!

6.) $P'(a) = l - 2a = 0$

$a = \frac{l}{2}$

7.) $P''(a) = -2$

$P''(\frac{l}{2}) = -2 < 0 \Rightarrow \max$

8.) $b = l - \frac{l}{2}$

$b = \frac{l}{2}$

9.) $P = \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{l^2}{4}$



2.) HB: $V_K = \frac{\pi r^2 h}{3} \Rightarrow \max$

3.) NB: $R^2 = r^2 + h^2$ (Pythagoras)

$r^2 = R^2 - h^2$ umgeformte NB

4.) $V(h) = \frac{(R^2 - h^2) \cdot \pi \cdot h}{3}$

5.) $V(h) = (R^2 - h^2) \cdot h$

$V(h) = R^2 h - h^3$

6.) $V'(h) = R^2 - 3h^2 = 0$

$h = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ $R=6: h = \frac{6\sqrt{3}}{3} = \sqrt{12}$

7.) $V''(h) = -6h$

$V''(\frac{R}{\sqrt{3}}) = -\frac{6R}{\sqrt{3}} < 0 \Rightarrow \max$

8.) $r^2 = R^2 - \frac{R^2}{3} = \frac{2R^2}{3}$

$r = \frac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{6}}{3}$ $R=6: r = \frac{6\sqrt{6}}{3} = \sqrt{24}$

9.) $V_K = \frac{R^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot R\sqrt{3}}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2\sqrt{3} \pi R^3}{27}$

Eine Strecke von gegebener Länge l ist in zwei Teile derart zu teilen, dass das Produkt der Längen der beiden Teilstrecken (a, b) möglichst groß wird! Wie lang sind dann die beiden Teilstrecken und wie groß das Produkt?

Der Halbkugel mit dem Radius $R=6\text{cm}$ ist der inhaltsgrößte Drehkegel (r, h) einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt. Bestimme dann r , h und das Volumen des Drehkegels!

Übungsblatt Extremwertaufgaben 1

46) Weide am Fluss:

Auf einem Bauernhof möchte der Bauer eine rechteckige Koppel für seine Pferde anlegen. Die Koppel liegt an einem Fluss und soll deshalb nur an drei Seiten eingezäunt werden. Der zur Verfügung stehende Zaun ist 200 m lang.

Wie muss der Bauer die Koppel anlegen, damit sie eine möglichst große Weidefläche hat! Wie groß ist die Weidefläche dieser Koppel?

47) Gehege in Koppel

Ein Bauer möchte innerhalb seiner rechteckigen Pferdekoppel ein rechteckiges Freigehege für seine Hühner abtrennen. Das Freigehege soll in einer der Koppelcken angelegt werden, so dass das Freigehege nur an zwei Seiten eingezäunt werden muss. Der zur Verfügung stehende Zaun ist Z m lang.

Wie muss der Bauer das Freigehege anlegen, damit die Hühner eine möglichst große Auslauffläche haben! Wie groß ist die Auslauffläche dieses Freigeheges?

48) offene Schachtel:

Aus einem rechteckigen Stück Pappe soll eine nach oben offene Schachtel hergestellt werden. Dazu werden aus den 4 Ecken Quadrate ausgeschnitten. Die Pappe ist 40 cm lang und 25 cm breit.

Wie müssen die Quadrate ausgeschnitten werden, damit das Fassungsvermögen der Schachtel möglichst groß ist?

Klebeflächen sollen nicht berücksichtigt werden.

49) Getränkepack:

Eine EU-Norm für eine Getränkepackung mit quadratischer Grundfläche für 1 Liter Inhalt soll erarbeitet werden: Bei der Produktion soll natürlich möglichst wenig Material verbraucht werden.

Welche Maße muss die EU-Norm vorschreiben?

Klebeflächen sollen nicht berücksichtigt werden.

50) Dose:

Eine EU-Norm für eine Dose für 1 Liter Fassungsvermögen soll erarbeitet werden: Bei der Produktion soll natürlich möglichst wenig Material verbraucht werden.

Welche Maße muss die EU-Norm vorschreiben?

Überlappungen bei der Herstellung sollen nicht berücksichtigt werden.

51) Zylinder:

Die Oberfläche eines geschlossenen Zylinders beträgt $24\pi \text{ dm}^2$. Wie müssen Radius und Höhe gewählt werden, damit das Volumen des Zylinders maximal wird?

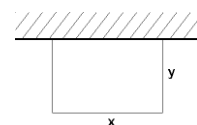
52) Dreieck, Rechteck:

Einem gleichschenkeligen Dreieck mit der Seitenlänge $c=12\text{cm}$ und der Höhe $h_c = 8\text{cm}$ wird ein Rechteck eingeschrieben, dessen Länge auf der Hypotenuse des Dreiecks liegt. Welche Seitenlängen muss das Rechteck haben, damit der Flächeninhalt maximal ist? Wie groß ist der Flächeninhalt dann? In welchem Verhältnis stehen die beiden Flächeninhalte dann zueinander?

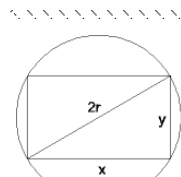
[Lösungen: 46) $l = 100\text{m}$, $b = 50\text{m}$, $A=5000\text{m}^2$ 47) $l = 0,5Z$ m, $b = 0,5Z$ m, $A = 0,25Z^2 \text{ m}^2$ 48) $l = 30 \text{ cm}$, $b = 15 \text{ cm}$, $h = 5\text{cm}$, $V= 2250 \text{ cm}^3$ 49) $a = 10\text{cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, (WÜRFEL!) $O = 600\text{cm}^2$ 50) $r = 5,42 \text{ cm}$, $h = 10,84\text{cm}$, $O = 553,58 \text{ cm}^2$ 51) $r=2\text{dm}$, $h=4\text{dm}$, $V=16\pi \text{ dm}^3$ 52) $x = 6\text{cm}$, $y = 4\text{cm}$, $A_R = 24\text{cm}^2$, 2:1

Übungsblatt Extremwertaufgaben 2

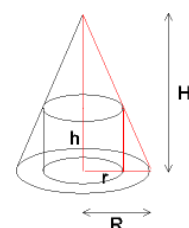
- 58.) Entlang einer Mauer soll eine rechteckige Fläche von 50 m^2 eingezäunt werden. Wie lang müssen die Seiten des Rechtecks sein, damit man möglichst wenig Zaun braucht?



- 59.) Welches von allen Rechtecken, die man einem Kreis vom Radius r einschreiben kann, hat den größten Flächeninhalt?



- 60.) Einem Kegel vom Radius R und der Höhe H werden Zylinder (r, h) eingeschrieben.
Welcher von diesen Zylindern hat das größte Volumen?



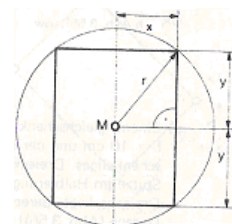
- 61.) Die Zahl 10 soll in zwei Summanden zerlegt werden, so dass die Summe ihrer Quadrate ein Minimum wird.

- 62.) Ein Getränkekarton mit dem Volumen V (1 dm^3) soll die Form eines quadratischen Prismas haben. Wie groß müssen Seitenlänge a und Höhe h des Prismas sein, damit die Oberfläche minimal wird?

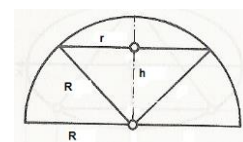
- 63.) Wie muss man den Radius r und die Höhe h einer zylindrischen Dose vom Volumen V (250 cm^3) wählen, damit die Oberfläche minimal wird?

- 64.) Wie 63., für einen oben offenen Topf!

- 65.) Einer Kugel vom Radius r (12 cm) soll der Zylinder(x, y) mit der größtmöglichen Mantelfläche M eingeschrieben werden!



- 66.) Einer Halbkugel vom Radius R (12 cm) ist der volumsgrößte Kegel (r, h) einzuschreiben, dessen Spitze im Mittelpunkt der Halbkugel liegt.



L: Ad 58.) $x = 10, y = 5$; Ad 59.) $x = r/2, y = r/2$ (Quadrat); Ad 60.) $r = 2R/3, h = H/3$; Ad 61.) $x=y=5$; Ad 62.) $a = h = \sqrt[3]{3V}$ (10 cm) - Würfel; Ad 63.) $r = \sqrt[3]{3V/2\pi}$ (5 cm), $h = 2 \cdot \sqrt[3]{3V/2\pi}$ (10 cm); Ad 64.) $r = h = \sqrt[3]{3V/\pi}$ ($6,3 \text{ cm}$); Ad 65.) $r = R/\sqrt{2}$ ($8,5 \text{ cm}$), $h = R\sqrt{2}$ ($17,0 \text{ cm}$); Ad 66.) $r = R\sqrt{2}/3$ ($9,8 \text{ cm}$), $h = R/\sqrt{3}$ ($6,9 \text{ cm}$)