Lehrveranstaltung „Mathematik 1“

Universitätslehrgang zur Vorbereitung auf die Studienberechtigung

Die Prüfungsvorbereitung für die Fachprüfung aus Mathematik erfolgt extern oder durch Teilnahme an dem an der Universität angebotenen Lehrgang (4 Wst. für M1, M2, M3 jeweils im WS und 3 Wst. im SS, für M2 und M3 noch 1 Wst. im SS)
Die Teilnahme am Lehrgang ist kostenpflichtig.
Die Fachprüfung besteht aus einem schriftlichen Teil (max. 180 Min.) und einem mündlichen Teil (ca. 30 Min.). Prüfungstermine sind jeweils Ende Juni, Anfang Oktober und Anfang Februar.

Prüfungsanforderungen MATHEMATIK 1,2,3

Mathematik 1:
Rechenregeln, elementare Algebra; Gleichungen und Ungleichungen; lineare Gleichungssysteme; Vektoren, Matrizen; elementare Funktionen und Anwendungen; Grundbegriffe der Differential- und Integralrechnung (nur Potenz- und Polynomfunktionen); Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Mathematik 2:
Mathematik 1 und lineare Ungleichungssysteme; Winkelfunktionen, Trigonometrie.

Mathematik 3:
Mathematik 1,2 und komplexe Zahlen; Vektorrechnung (Analytische Geometrie);
Erweiterung der Differential- und Integralrechnung.

Prüfungsmethode: schriftlich und mündlich
Die Prüfung besteht aus einem schriftlichen Teil und einem mündlichen Teil.
Im schriftlichen Teil der Prüfung sind Aufgaben zu verschiedenen Themen zu lösen. Im mündlichen Teil wird überwiegend die Kenntnis von Begriffen und deren Anwendungsbereichen überprüft.

Erlaubte Hilfsmittel: Taschenrechner der TI-30er-Familie oder ähnliche Geräte anderer Hersteller; approbierte Formelsammlung

Literatur: Grundsätzlich sind alle aktuellen Lehrbücher für Oberstufenformen geeignet. Im Lehrgang wird der Lehrstoff anhand des vorliegenden Skriptums behandelt.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Formelsammlung:

Folgende Formelsammlungen sind vom Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur approbiert und können im Rahmen der Prüfung verwendet werden:

- Tabellen und Formeln, Ausgabe AHS; Floderer, Manfred; Groß Herbert; öbv, Wien
- Formelsammlung Mathematik für allgemeinbildende höhere Schulen; Bossek, Hubert; Engelmann, Lutz; Fanghänel, Günther; Liesenberg, Günter; Stamm, Reinhard; Weber, Karlheinz; Veritas Verlags-u. Handels-GmbH, Linz
- Formelsammlung Mathematik für AHS und BBS; Bös, Astrid; Schütz, Christiane; Verlag E. DORNER, Wien
- Mathematische Formelsammlung; Götz, Stefan; Unfried Hubert; öbv, Wien

Weitere Infos zur Studienberechtigung:

http://www.uni-klu.ac.at/hlg/sber/

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

L. Integralrechnung

1. Stammfunktion (unbestimmtes Integral)

Wir formulieren zunächst die Idee, den Prozess des Differenzierens "umzukehren". Ist f eine gegebene reelle Funktion, und ist F eine Funktion, deren Ableitung f ist, d.h.

$$F'(x) = f(x)$$

für alle x im Definitionsbereich von f, so nennen wir F eine **Stammfunktion** von f.

Beispiel: $F(x) = x^3$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^2$, denn $F'(x) = 3x^2$.

Beachten Sie: $G(x) = x^3 + 1$ ist ebenfalls eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^2$, denn $G'(x) = 3x^2$.
Wie dieses Beispiel zeigt, ist die Stammfunktion nicht eindeutig ▫ eine Funktion kann mehrere Stammfunktionen haben. Tatsächlich folgt aus der Existenz *einer* Stammfunktion, dass sie mehrere hat, und es gilt:

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist jede Stammfunktion von f von der Form

$$F(x) + c,$$

wobei c eine Konstante ist.

Wir bezeichnen die Stammfunktion als <u>unbestimmtes Integral</u> und verwenden für sie die Schreibweise

$$\int f(x)dx$$

(ausgesprochen: "Integral von f(x)" oder "Integral f(x)dx").

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Beispiel:

$$\int 3x^2 \, dx = x^3 + c.$$

Der Zusatz " + c" soll anzeigen, dass die Stammfunktion nur bis auf eine (beliebige) Konstante (die so genannte **Integrationskonstante**) eindeutig ist. Er wird manchmal der Einfachheit halber weggelassen (sollte aber dann zumindest dazugedacht werden).

Der Vorgang, eine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion zu finden, heißt **integrieren**. (Dieses Wort wird später noch eine zusätzliche Bedeutung erhalten). Der Ausdruck zwischen dem Integralzeichen $\int$ und dem Symbol dx (zu deren Bedeutung wir weiter unten noch etwas sagen werden) heißt **Integrand** ("zu integrierende Funktion").

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

2. Integrationsregeln

Beispiel:

Welche Funktion hat die Ableitung f(x) = x?
Eine mögliche Antwort ist $F(x) = x^2/2$.

Eine beliebige Stammfunktion ist von der Form $F(x) = x^2/2 + c$ (c ist eine beliebige Konstante), weil konstante Summanden beim Differenzieren wegfallen.

Wenn von der Funktion sonst nichts bekannt ist, müssen wir also immer die Integrationskonstante c dazuschreiben.

Die **Stammfunktion** bezeichnet man auch als **unbestimmtes Integral**:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen:

$f(x) = k$	$F(x) = kx + c$
$f(x) = x^n$ $(n \neq -1)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Integrationsregeln:

$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)\,dx$
$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Beispiel:

Eine Funktion hat die Ableitung $f'(x) = 2x$; der Graph geht durch den Punkt P(2/7). Bestimme die Funktionsgleichung!

$$\int 2xdx = x^2 + c$$

Koordinaten von P einsetzen:

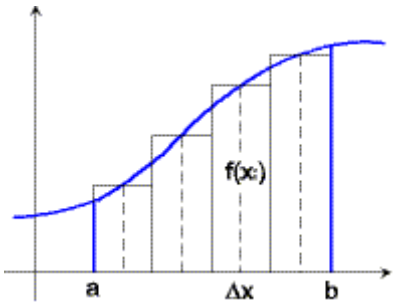
$2^2 + c = 7$ => $c = 3$

=> $f(x) = x^2 + 3$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

3. Flächenberechnung (bestimmtes Integral)

Die Funktion f(x) sei gegeben; wir wollen die Fläche zwischen dem Funktionsgraphen und der x-Achse im Intervall [a, b] berechnen.



Einen Näherungswert erhält man, wenn man [a, b] in Teilintervalle der Länge Δx teilt, in jedem Intervall eine Stelle x_i wählt und die Flächeninhalte der Rechtecke $\Delta x \cdot f(x_i)$ addiert:

$A = (f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)) \cdot \Delta x$,

in Summenschreibweise:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

Die Fläche - das **bestimmte Integral** - definieren wir als Grenzwert dieser Summe, wenn Δx gegen 0 geht; man schreibt:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ausgesprochen: "Integral *f*(*x*) in den Grenzen von *a* bis *b*" oder "Integral *f*(*x*)d*x* von *a* bis *b*", auch "Integral über *f*(*x*) von *a* bis *b*"). Wie beim oben besprochenen unbestimmten Integral wird *f*(*x*) als **Integrand** bezeichnet, *a* heißt **untere** und *b* heißt **obere Integrationsgrenze**, und das Intervall [*a*, *b*] wird **Integrationsbereich** (auch Integrationsintervall oder Integrationsgebiet) genannt.

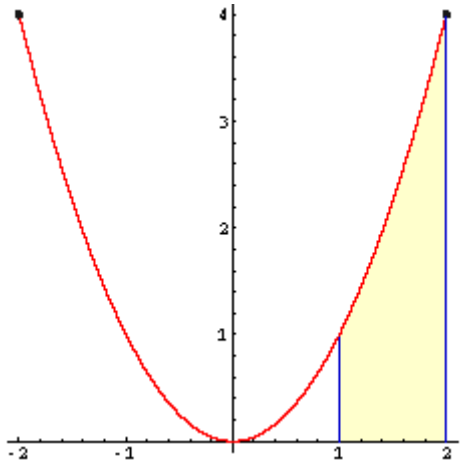
© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

das heißt, die Fläche unter dem Graphen von f(x) ist eine Stammfunktion von f.

Beispiel:
Wir suchen die Fläche unter dem Graphen der Funktion $f(x) = x^2$ zwischen den Grenzen a = 1 und b = 2.



$$\int_1^2 x^2 dx =$$ *Stammfunktion finden*

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$ *Grenzen einsetzen, untere Grenze von oberer abziehen*

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

a. Fläche zwischen Funktion und x-Achse

Achtung: Für f(x) < 0 ist auch das Integral negativ. Der Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse ist dann der *Betrag* des Integrals.

Wenn die Funktion im angegebenen Intervall ein oder mehrere Nullstellen hat, müssen wir daher die einzelnen Flächenstücke getrennt berechnen und ihre Beträge addieren.

Wenn die Fläche zwischen einer Kurve und der x-Achse berechnet werden soll (ohne dass ein Intervall angegeben ist), müssen wir **zuerst die Nullstellen** bestimmen - das sind dann die **Integrationsgrenzen**.

b. Fläche zwischen 2 Funktionen

Die Fläche, die von *zwei Kurven* - den Graphen der Funktionen f(x) und g(x) - eingeschlossenen wird, berechnen wir nach der Formel

$$A = \int_{x1}^{x2} (f(x) - g(x))dx$$

Die **Integrationsgrenzen** sind dabei die **x-Koordinaten der Schnittpunkte**. Wenn es mehr als zwei Schnittpunkte gibt, muss man wieder die einzelnen Flächenstücke getrennt berechnen.

Beispiele:

1. *Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2 - 1$ und der x-Achse zwischen den Grenzen a = 0 und b = 2 eingeschlossen wird?*

   Die Funktion hat bei $x_1 = 1$ eine Nullstelle, wir müssen daher von 0 bis 1 und von 1 bis 2 getrennt integrieren:

$$\int_0^1 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_1^2 (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2 = \frac{4}{3}$$

$$A = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

2. *Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 3x^2$ und der x-Achse begrenzt wird?*

   Nullstellen bestimmen: $-x^3 + 3x^2 = 0$ ▫ $x_1 = 0$, $x_2 = 3$

$$A = \int_0^3 \left(-x^3 + 3x^2\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + x^3\right]_0^3 = 6\tfrac{3}{4}$$

3. *Wie groß ist die Fläche zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3$?*

   Schnittpunkte bestimmen: $x^2 = x^3$ ▫ $x_1 = 0$, $x_2 = 1$

$$A = \int_0^1 \left(x^2 - x^3\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

c. Volumsberechnungen

Mit Hilfe der Integralrechnung kann man auch Volumina berechnen. Wir betrachten hier nur Drehkörper.

Wenn eine Kurve um die x- oder y-Achse rotiert, kann man den entstehenden Drehkörper in schmale Schichten der Dicke Δx bzw. Δy teilen und diese näherungsweise durch Zylinder ersetzen. Ähnlich wie vorhin erhält man für das Volumen die Formeln **($V = r^2 \cdot \pi \cdot h$)**

$$V_x = \pi \cdot \int_{x_1}^{x_2} y^2 dx$$ bei Rotation um die x-Achse

$$V_y = \pi \cdot \int_{y_1}^{y_2} x^2 dy$$ bei Rotation um die y-Achse

Beispiel:

Der Graph der Funktion $y = x^2/4$ im Intervall [0, 2] rotiert um die Koordinatenachsen. Wie groß sind die Volumina der dabei entstehenden Drehkörper?

Rotation um x-Achse: $y^2 = x^4/16$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$

$$V_x = \pi \cdot \int_0^2 \frac{x^4}{16} dx = 0{,}4\pi$$

Rotation um y-Achse: $x^2 = 4y$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^1 4y dy = 2\pi$$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Integralrechnung 1

1. Ermittle die Stammfunktionen der folgenden Funktionen:

a.) $f(x) = 3x$ b) $f(x) = 8x^3$ c) $f(x) = x^2 + x$ d) $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$

e) $f(x) = x^6 - 3x^5 + 7x^3$ f) $f(x) = x^2/3 + x/4$ g) $f(x) = x^4/10 - 3x^2 + 2/3$

h) $f(x) = 1/x^2$ i) $f(x) = 1/x^3$ j) $f(x) = \sqrt{x}$

2. Ermittle die Gleichung der Funktion, wenn die Ableitung und ein Punkt des Funktionsgraphen gegeben ist.

a.) $f'(x) = 4x$; P(2/5) b) $f'(x) = 2x - 3$; P(1/0) c.) $f'(x) = -6x + 5$; P(2/3)

d.) $f'(x) = -x + 1$; P(-1/1) e.) $f'(x) = 3x^2 - 4x$; P(0/-4) f.) $f'(x) = 6x^2 - 5$; P(-2/-5)

g.) $f'(x) = -x^2 + x + 4$; P(3/4) h.) $f'(x) = 2x^3 - 6x$; P(-2/1)

3. Berechne die Integrale der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall:

a.) $f(x) = 2x$, [1, 3] b.) $f(x) = x/2 + 1$, [-2, 2] c.) $f(x) = 5 – x$, [1, 4]

d.) $f(x) = x^2$, [1, 3] e.) $f(x) = x^2/4 + 2$, [0, 4] f.) $f(x) = 4 - x^2/3$, [-3, 3]

g.) $f(x) = 4x - x^2$, [0, 4] h) $f(x) = x^3 + 1$, [-1, 1] i.) $f(x) = x^3/4 - x + 1$, [-2, 2]

j.) $f(x) = x^3/4 - 3x^2/2 + 7x/2$, [0, 3] k.) $f(x) = x4/4 - 2x^2 + 4$, [-2, 2]

l.) $f(x) = 4 - 1/x^2$, [0,5; 2] m.) $f(x) = \sqrt{x}$, [0, 9]

4. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und x-Achse:

a.) $f(x) = 4 - x^2$ b.) $f(x) = x^2 - x - 2$ c.) $f(x) = 4x^2 - x^3$

d.) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ e.) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ f.) $f(x) = x^3 - 8x^2 + 15x$

g.) $f(x) = x^3/3 - 3x$ h.) $f(x) = x4 - 5x^2 + 4$

Lösungen:

1) a) $F(x) = 3x^2/2 + C$ b) $F(x) = 2x^4 + C$ c) $F(x) = x^3/3 + x^2/2 + C$ d) $F(x) = x^3 + 2x^2 + x + C$
e) $F(x) = x^7/7 - x^6/2 + 7x^4/4 + C$ f)$F(x) = x^3/9 + x^2/8 + C$ g) $F(x) = x^5/50 - x^3 + 2x/3 + C$ h) $F(x) = -1/x + C$
i) $F(x) = -1/2x^2 + C$ j) $F(x) = 2/3\cdot x^3 + C$

2.) a) $f(x) = 2x^2 - 3$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ c) $f(x) = -3x^2 + 5x + 5$ d) $f(x) = -x^2/2 + x + 5/2$ e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4$
f) $f(x) = 2x^3 - 5x + 1$ g) $f(x) = -x^3/3 + x^2/2 + 4x - 7/2$ h) $f(x) = x^4/2 - 3x^2 + 5$

3.) a.) 8 b.) 4 c.) 7,5 d.) 8,67 e.) 13,33 f.) 18 g.) 10,67 h.) 2 i.) 4 j.) 7,31 k.) 8,53 l.) 4,5 m.) 18

4.) a.) 10,67 b.) 4,5 c.) 21,33 d.) 6,75 e.) 8 f.) 21,08 g.) 13,5 h.) 8

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Integralrechnung 2

5. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen den beiden Kurven:

   a.) $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 6$ b.) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x$ c.) $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x - x^2$

   d.) $f(x) = x^2$, $g(x) = 5 - x^2/4$ e.) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ f.) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$

   g.) $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = 4x + 1$ h.) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$, $g(x) = 3x - x^2$

6. Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^2/4 + 2$, der Tangente im Punkt P(4/yP) und den Koordinatenachsen begrenzt wird?

7. Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3/16 - 3x^2/8 + 4$, der Wendetangente und den Koordinatenachsen begrenzt wird?

Volumsberechnungen

8. Der Abschnitt des Graphen von f(x) zwischen den Punkten (x1/f(x1)) und (x2/f(x2)) rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Drehkörpers!

   a. $f(x) = 3x$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
   b. $f(x) = x/2 + 3$ $x_1 = 0$, $x_2 = 4$
   c. $f(x) = x^2/3$ $x_1 = 0$, $x_2 = 3$
   d. $f(x) = x^2 + 1$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$
   e. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_1 = 1$, $x_2 = 8$
   f. $f(x) = 1/x$ $x_1 = 1$, $x_2 = 5$

9. Gegeben sind die Kurve $y^2 = 8x$ und die Gerade $y = 2x$. Berechne das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn das Flächenstück zwischen der Kurve und der Geraden um die x-Achse rotiert!

10. Das Flächenstück zwischen den Parabeln $y^2 = 4x$ und $x^2 = 4y$ rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?

11. Die Form einer Vase entsteht, wenn der Graph der Funktion f: $y = x^2/20 + 5$ zwischen den Grenzen x1 = -8 und x2 = 10 um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen der

Lösungen:

5) a) 20,83 b) 4,5 c) 2,67 d) 13,33 e) 0,083 f) 0,267 g) 8 h) 3,08 **6.)** 4,33 **7.)** 13,25 **8.)** a.) 24π b.) $65{,}33\pi$ c.) $5{,}4\pi$ d.) $13{,}73\pi$ e.) $18{,}6\pi$ f.) $0{,}8\pi$ 9.) $5{,}33\pi$ 10.) $19{,}2\pi$ 11.) $752{,}3\pi = 2363\ cm^3$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

M. Statistik

1. Grundbegriffe der Statistik

Die Statistik wird in 2 Gebiete untergliedert:

a. In der **beschreibenden Statistik** werden Daten erfasst und diese durch Tabellen, Grafiken und Kennzahlen möglichst übersichtlich dargestellt.
b. Die **beurteilende Statistik** versucht auf Basis der beschreibenden Statistik Prognosen und Vergleiche herzustellen, beschäftigt sich also z. B. mit der Qualitätskontrolle von Produkten.

In der Statistik haben wir es mit ***Stichproben*** zu tun, die aus einer ***Grundgesamtheit*** (alle Einwohner eines Landes, alle Äpfel aus einer Lieferung ...) entnommen werden. Die Elemente der Stichprobe werden auf ein bestimmtes ***Merkmal*** untersucht, das in verschiedenen ***Ausprägungen*** auftreten kann.

Urliste: vollständige Auflistung der Daten in der Reihenfolge, in der sie erhoben wurden

Geordnete Liste oder Rang(wert)liste: nach der Größe geordnete Daten der Urliste

BESCHREIBENDE STATISTIK

Qualitative Merkmale		**Quantitative Merkmale**	
Nominalskala	**Ordinalskala (Rangskala)**	**Metrische Skala** Merkmale sind quantifizierbar!	
Merkmale entsprechen der Angabe einer Kategorie	Merkmale werden der Größe nach gereiht	**Diskrete Merkmale** werden durch Zählen bestimmt (□ natürliche Zahlen)	**Stetige Merkmale** werden durch Messung bestimmt (□ reelle Zahlen)
Geschlecht, Nationalität, Sprache, Blutgruppe, …	Bildungsniveau, Platzierung, Dienstgrad, …	Alter, Einwohner, …	Länge, Gewicht, …
Nur die Zuordnung von Häufigkeiten ist sinnvoll.	Hier werden Qualitätsunterschiede wiedergegeben. Man kann jedoch nicht entscheiden, wie groß die Abstände zwischen den Rangplätzen sind.	Abstände zwischen benachbarten Zahlen sind gleich.	

n:	Umfang der Stichprobe (Anzahl)
$x_1, x_2, \ldots, x_n$:	gemessene Werte (Ausprägungen des untersuchten Merkmals)
$H_1, H_2, \ldots$:	**absolute Häufigkeit** (Wie oft kommt das Merkmal vor?)
$h_1, h_2, \ldots$:	**relative Häufigkeit** ($h_i = H_i/n$; Wie oft kommt das Merkmal vor im Bezug auf den Stichprobenumfang?)

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Bsp.:

In Österreich wird eine politische Meinungsumfrage zu kommenden Wahlen durchgeführt. Dabei werden stichprobenartig 1000 Personen befragt. 325 Personen geben an, bei der Wahl die SPÖ wählen zu wollen, 328 die ÖVP, 126 die FPÖ, 132 die Grünen, 36 das BZÖ. 53 Personen sind verärgert über die derzeitige Parteienlandschaft und geben an, nicht wählen zu gehen.

Bestimme nun die folgenden Begriffe für das Beispiel:

Grundgesamtheit, Stichprobenumfang, Merkmal, Ausprägungen, gemessene Werte, absolute Häufigkeiten, relative Häufigkeiten!

Wie könnte so eine Meinungsumfrage grafisch dargestellt werden?

Bsp.:

Ergänze in der Tabelle, um welche Merkmalsausprägung es sich handelt und auf welcher Skala „gemessen" werden darf, bei der metrischen Skala gib an, ob ein diskretes oder ein stetiges Merkmal vorliegt

Merkmal	**Merkmals-ausprägung**	**Nominal -skala**	**Rang -skala**	**Metrische Skala**
Pizzabelag				
Schuhgröße				
Körpergröße				
Schulnoten				
Anzahl der Wähler einer Partei				
Haarfarbe				
Luftdruck				
Anzahl der Fernseher in einem Haushalt				
Religionszugehörigkeit				

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

2. Maße

Wir versuchen, die Stichprobe durch einen "mittleren Wert" zu beschreiben.

a. Mittelwerte

Der Mittelwert (das **arithmetische Mittel**) ist das wichtigste Zentralmaß:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Wenn Werte mehrmals vorkommen, rechnet man besser mit den relativen Häufigkeiten:

$$\bar{x} = x_1 \cdot h_1 + x_2 \cdot h_2 + \ldots = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h_i$$

(gewichtetes arithmetisches Mittel)

geometrisches Mittel:
Ein praktisches Beispiel: Ein Kapital wird ein Jahr lang mit 30%, im nächsten Jahr mit 60% verzinst. Wie hoch ist die durchschnittliche Verzinsung? Hier dürfen wir nicht einfach addieren - es gilt ja:
$K_2 = K_0 \cdot 1{,}3 \cdot 1{,}6$
Wir müssen also rechnen: $\sqrt{1{,}3 \cdot 1{,}6} = 1{,}4422$ Die durchschn. Verzinsung beträgt 44,22%.
Allgemeine Formel:

$$\overline{x_g} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Beispiele:

1.) 10 Buben aus einer 3. Klasse Volksschule wurden gemessen und gewogen:
Größe in cm (x): 137; 131,5; 136,5; 131,5; 141,5; 130,5; 130; 139; 138; 134
Gewicht in kg (y): 31,5; 25,5; 32; 24; 37; 26,5; 27,5; 31,5; 35; 27
Bestimme die Durchschnittsgröße und das Durchschnittsgewicht!

2.) Ein Unternehmen machte in den letzten 5 Jahren folgende Gewinnentwicklung durch: +5,6%, +9%, +12%, -4,2%, +1,7%
Gib die durchschnittliche Gewinnentwicklung der letzten 5 Jahre an!

3.) Bei einer Schularbeit ergab sich folgende Notenverteilung:

Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
3	7	11	8	4

Berechne den Notenschnitt!

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

b. Median (Zentralwert):

Das arithmetische Mittel hat den Nachteil, dass es sehr empfindlich gegenüber "Ausreißern" ist (wenn z.B. in einer Firma 9 Personen je 1000 € verdienen und der Chef 11000 €, beträgt das "Durchschnittseinkommen" 2000 €!)
In solchen Fällen ist der Median (Zentralwert) aussagekräftiger: Wir ordnen die Daten der Größe nach und betrachten den Wert in der Mitte der Liste. Bei einer geraden Anzahl von Daten bilden wir das arithmetische Mittel der beiden mittleren Werte. Die so erhaltene Zahl hat die Eigenschaft, dass die Hälfte der Werte darunter, die Hälfte darüber liegt.

$z = x_{(n+1)/2}$ für ungerades n

$z = 1/2(x_{n/2}+x_{(n/2)+1})$ für gerades n

(x_i: Werte aus geordneter Urliste)

c. Quartile:

Die Quartile definiert man analog zum Median:
unteres Quartil q_1 bzw. $Q_{0,25}$: ¼ der Werte liegen darunter, oberes Quartil q_3 bzw. $Q_{0,75}$: ¾ der Werte liegen darunter
Der Median ist in dieser Bezeichnungsweise das 2. Quartil q_2 bzw. $Q_{0,5}$. (Ebenso definiert man **Perzentile**, z.B. 10%-Perzentil $Q_{0,1}$: 10% der Werte liegen darunter.)
Eine sehr übersichtliche Darstellung von Median, Spannweite und Quartilen ist das Boxplot-Diagramm ("box and whiskers", siehe Beispiel): Die "Box" reicht vom unteren bis zum oberen Quartil, die Linie in der Mitte gibt den Median an. Der "Schnurrbart" reicht bis zum kleinsten bzw. größten Wert.
Quartilenabstand: Differenz zwischen oberem und unterem Quartil. Er gibt die mittleren 50% der Verteilung an, d.h. sowohl das obere Viertel, als auch das untere Viertel entfallen. Beachte: q1 heißt auch 25% Perzentil und q3 heißt 75% Perzentil.

d. Modus

Der Modus (**Modalwert**) ist der Wert, der **am häufigsten vorkommt**. Eine Stichprobe kann auch mehrere Modalwerte haben. Dieser Wert liefert am wenigsten Information, er kann aber auf allen Datenniveaus angewendet werden.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

e. Streuungsmaße

liefern ein Maß dafür, **wie sehr die gemessenen Werte vom Mittelwert abweichen**.

i. Varianz

Wir interessieren uns für die Differenzen der gemessenen Werte zum Mittelwert. Damit wir nicht mit negativen Zahlen rechnen müssen, quadrieren wir diese Differenzen und bilden davon wieder den Mittelwert. So erhalten wir die **Varianz**:

$$V(x) = \frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

Das kann man umformen zu folgender Formel, die leichter zu berechnen ist:

$$V(x) = \frac{1}{n}(x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2) - (\bar{x})^2 = (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2) - (\bar{x})^2$$

("Mittelwert der Quadrate minus Quadrat des Mittelwerts")

Wenn Werte mehrmals vorkommen, rechnet man wieder mit dem gewichteten Mittel:

$$V(x) = (\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 \cdot h_i) - (\bar{x})^2$$

Damit die Dimension wieder "stimmt", ziehen wir die Wurzel aus der Varianz und erhalten die

ii. Standardabweichung:

$$s = \sqrt{V(x)}$$

(Achtung, Verwechslungsgefahr: In manchen Büchern findet sich für die Varianz folgende Formel: $V(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ Sie wird dann verwendet, wenn man aufgrund einer Stichprobe die Varianz der Grundgesamtheit abschätzen will.)

iii. Spannweite

Die Differenz zwischen dem kleinstem und dem größten Wert bezeichnet man als Spannweite (engl. range). Dieses Streuungsmaß ist besonders leicht zu berechnen.

$w = x_{max} - x_{min}$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Statistik 1

Ermittle bei folgenden Beispielen Mittelwert, Standardabweichung, Median, Modus und Spannweite!

1.) Zehn Frauen wurden nach ihrer Körpergröße (in cm) gefragt und gaben folgendes an:
168, 170, 161, 168, 162, 172, 164, 167, 170, 158

2.) Dieselben Frauen gaben auch ihre Schuhgröße an:
39, 39, 38, 38, 37, 41, 38, 38, 40, 37
Rechne mit relativen Häufigkeiten!

3.) Beim 100m-Lauf erzielten sechs Teilnehmer folgende Zeiten:
11,3 s; 13,5 s; 10,9 s; 12,4 s; 11,8 s; 12,7 s

4.) Eine Zimmervermieterin in einem Fremdenverkehrsort notiert sich, wie viele Nächte die Gäste bleiben:
7; 5; 2; 7; 7; 1; 14; 2; 1; 14; 7; 3

5.) Bei einem Test erzielten 20 Teilnehmer folgende Punktezahlen:
9; 7; 10; 5; 10; 8; 3; 9; 10; 0; 2; 3; 5; 7; 4; 9; 0; 8; 5; 6

6.) Bei einer Schularbeit ergab sich folgende Notenverteilung:

Sehr Gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht Genügend
3	5	10	5	2

7.) In einer Stadt sind die Kinderzahlen pro Familie wie folgt verteilt:

Kein Kind	1 Kind	2 Kinder	3 Kinder	4 Kinder
15%	25%	30%	20%	10%

8.) In einem Callcenter wird die Dauer von 100 Gesprächen aufgezeichnet (Rechne mit Klassenmitten):

0 - 2 min	2 - 4 min	4 - 10 min	10 - 20 min
40	35	15	10

9.) Ein Servicebetrieb zeichnet bei 200 Einsätzen die Weglängen auf (Rechne mit Klassenmitten):

0 - 1 km	1 - 5 km	5 - 10 km	10 - 20 km
36	42	70	52

10.) Von 20 Schülern wurde die Körpergröße gemessen:
165 cm; 158 cm; 163 cm; 169 cm; 147 cm; 172 cm; 158 cm; 177 cm; 151 cm; 142 cm; 166 cm; 170 cm; 151 cm; 183 cm; 160 cm; 175 cm; 149 cm; 168 cm; 171 cm; 166 cm
(Teile die Werte in Klassen von 140 - 150 cm, 150 - 160 cm ... ein! Wenn ein Wert auf einer Klassengrenze liegt, soll er zur unteren Klasse gerechnet werden.)

Lösungen: 1.) $\bar{x}$ =166, z=187,5; m: 168 und 170; s = √18,6 = 4,313; w=14 **2.)** $\bar{x}$ =38,5; z=38; m= 38; s=√1,45 = 1,204; w=4 **3.)** $\bar{x}$ = 12,1; s = 0,87; z= 12,1 **4.)** $\bar{x}$ = 5,83; s = 4,32; z= 6; **5.)** $\bar{x}$ = 6; s = 3,15 **6.)** $\bar{x}$ = 2,92; s=1,09 **7.)** $\bar{x}$ = 1,85; s= 1,19 **8.)** $\bar{x}$ = 4; s = 4,17 **9.)** $\bar{x}$ = 7,245; s = 5,267 **10.)** $\bar{x}$ = 162,5; s = 10,9

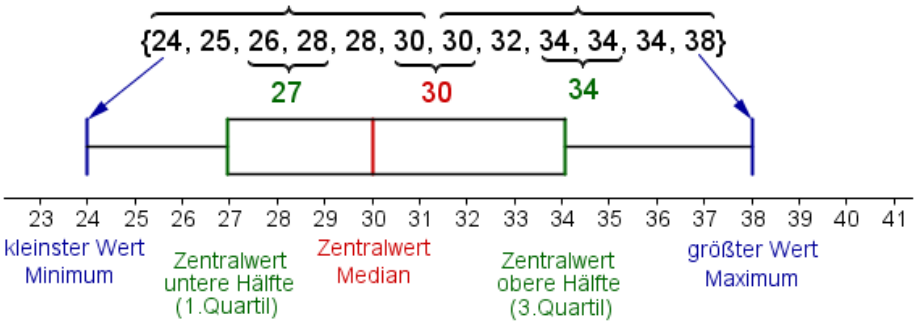
© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Bsp.11

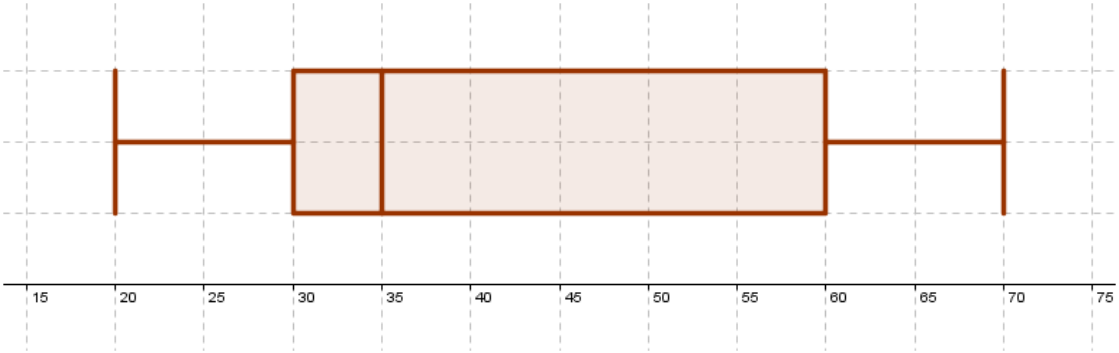
Zeichne einen Boxplot für folgende statistische Erhebung!
Peter bestellt häufig beim Pizza-Blitz. Er notiert jedes Mal die Zeit zwischen Bestellung und Lieferung der Pizzen (in Minuten):
25 ; 24 ; 36 ; 38 ; 37 ; 30 ; 32 ; 36 ; 35 ; 38 ; 28 ; 29 ; 31

Wie zeichnet man ein Boxplot-Diagramm?

1. Ordne die Daten der Größe nach ...
2. Bestimme das Minimum und Maximum ...
3. Bestimme den Zentralwert der unteren Hälfte ...
4. Bestimme den Zentralwert der oberen Hälfte ...
5. Zeichne die Box ...
6. Bestimme den Zentralwert ...

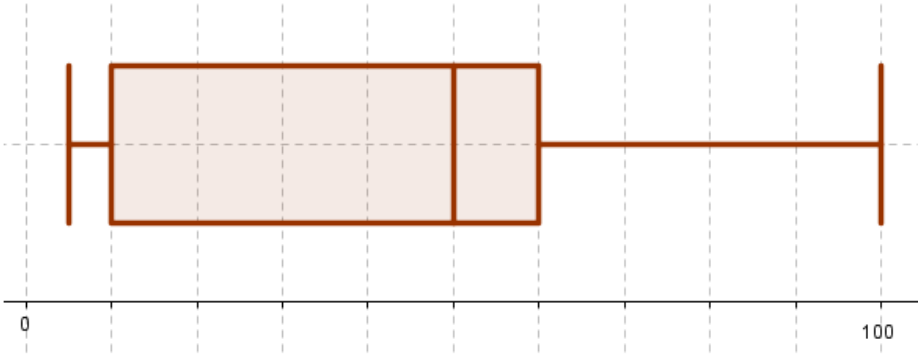


Bsp. 12.
Beschreibe den hier abgebildeten Boxplot! Nutze die Begriffe Median, unteres bzw. oberes Quartil, Minimum, Maximum, Spannweite und Quartilenabstand:



© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

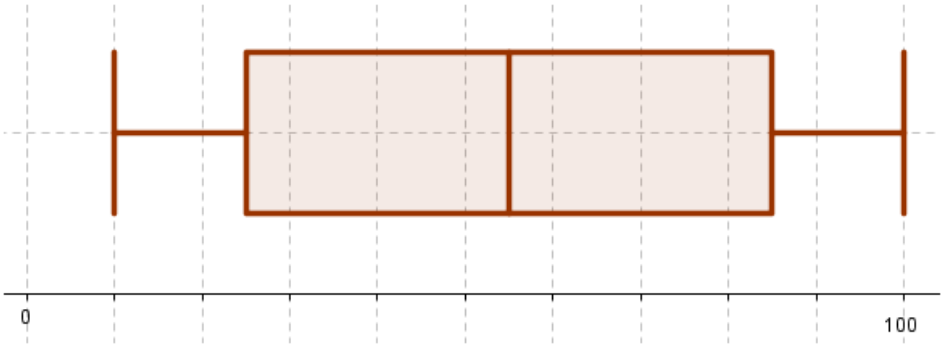
Bsp. 13.



Welche der folgenden Aussagen treffen zu? (Kreuze die richtigen Aussagen an!)

- ☐ Es gibt einen Ausreißer.
- ☐ x_{max}=100.
- ☐ Die Hälfte der Daten liegt zwischen 50 und 100.
- ☐ 25% der Daten liegen zwischen 5 und 10.
- ☐ Die Spannweite ist doppelt so groß wie der Quartilenabstand.

Bsp. 14.



Welche der folgenden Aussagen treffen zu? (Kreuze die richtigen Aussagen an!)

- ☐ Der Median ist 55.
- ☐ Die Daten liegen gleichmäßig verteilt um den Median.
- ☐ x_{min}=10.
- ☐ 50% der Daten liegen zwischen 25 und 85.
- ☐ 75% der Daten liegen zwischen 10 und 85.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

N. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ereignisse sind oft nicht genau vorhersagbar. Man weiß vorher nicht sicher, ob sie eintreten werden. Solche Ereignisse nennt man zufällig.

Beispiele: *Münzwurf (Kopf oder Zahl)*
Roulette
Brenndauer einer Glühbirne
Wettervorhersagen
Unfälle in einem bestimmten Zeitraum
Unfälle auf einem bestimmten Streckenabschnitt

Das **Maß für die Erwartung,** mit der ein beliebiges Ereignis E eintritt, nennt man **Wahrscheinlichkeit P(E)**. (P ... probability, engl.)

Ausgangspunkt für die Wahrscheinlichkeitstheorie war die Theorie der Glückspiele, die von Blaise PASCAL begründet und von Jakob BERNOULLI (1654-1705) sowie von Pierre Simon de LAPLACE (1749-1827) weiterentwickelt wurde und schließlich zur nachstehenden Wahrscheinlichkeitsdefinition führte.

1. Laplace-Wahrscheinlichkeit

Laplace Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis E (klassische Wahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil):

$$P(E) = \frac{\text{Anzahl der für E günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}}$$

Anders formuliert bedeutet das: Es sei M eine endliche Menge (Grundmenge) und G $\subseteq$ M (G Teilmenge von M). Als Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein aus M zufällig ausgewähltes Element zu G gehört, kann man den relativen Anteil von G in M nehmen.

$$P(\text{das zufällig ausgewählte Element gehört zu M}) = \frac{\text{z(G)}}{\text{z(M)}}$$

z(G) ... Anzahl der Elemente von G;
z(M) ... Anzahl der Elemente von M
Da z(G) kleiner als z(M) folgt daraus: $0 \leq P(E) \leq 1$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Die obige Wahrscheinlichkeits-„Definition“ gilt jedoch nur unter einer ganz bestimmten Voraussetzung, nämlich, dass alle Einzelereignisse gleichmöglich und daher also gleichwahrscheinlich sind.

a. Wichtige Regeln

- Für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines beliebigen Ereignisses E gilt: $0 \leq P(E) \leq 1$
- P(E) =0 ……unmögliches Ereignis (0%)
- P(E) =1 ……sicheres Ereignis (100%)
- Die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses E’ zum Ereignis E beträgt: P(E’) = 1 − P(E)

Beispiel:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem üblichen Spielwürfel einen 2er oder 6er zu würfeln?

Ermitteln der günstigen Fälle: G = {2;6}; z(G) = 2

Ermitteln der möglichen Fälle: M = {1;2;3;4;5;6}; z(M) = 6

Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \frac{2}{6} = 0{,}333333 = 33{,}33\%$$

Die Wahrscheinlichkeit ist 0,333333; das entspricht 33,33%.

Beispiel:

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, beim Würfeln eine ungerade Zahl zu erhalten.

Ermitteln der günstigen Fälle: *G = {1;3;5 }; z(G) = 3*

Ermitteln der möglichen Fälle: *M = {1;2;3;4;5;6}; z(M) = 6*

Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$$P(E) = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

Die Wahrscheinlichkeit ist 0,5; das entspricht 50%.

Beispiel:

Es wird mit einem sechsseitigen Würfel gewürfelt.

a. Geben Sie die Ergebnismenge beim Würfeln, sowie alle Elemetarereignisse an.
b. Nennen Sie dazu ein unmögliches Ereignis bzw. ein sicheres Ereignis.
c. Wie lautet das Gegenereignis zum Ereignis „Es kommt eine Zahl kleiner als 3“
d. und welchen Wert haben die Wahrscheinlichkeiten von E und E´?

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Lösung:

a. Ergebnismenge Würfeln: Ω = {1;2;3;4;5;6}
   Elementarereignisse: E1= {1}; E2= {2}; E3= {3};E4 = {4 }; E5= {5 }; E6= {6}
b. unmögliches Ereignis: „Es kommt die Zahl 7“
   sicheres Ereignis: „Es kommt eine ganze Zahl größer als Null und kleiner als Sieben“
c. Gegenereignis: E’ = „Es kommt eine Zahl ≥ 3“; E = {1;2}; E’ = {3;4;5;6}
d. Wahrscheinlichkeiten: $\mathrm{P(E)} = \frac{2}{6} = 0{,}3333 = 33{,}33\%$

$$P(E') = 1 - \mathrm{P(E)} = 1 - \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = 0{,}6666 = 66{,}66\%$$

b. Definitionen für 2 Ereignisse E1 und E2 (Ereignisalgebra)

- Das Ereignis **E1 ∩ E2** tritt genau dann ein, wenn **E1 und E2** eintreten.
- Ereignisse, die nicht gleichzeitig eintreten können, heißen **unvereinbar**; sie schließen einander aus und es gilt: **E1 ∩ E2 = { }**. Gegenereignisse sind daher unvereinbar.
- Das Ereignis **E1 ∪ E2** tritt genau dann ein, wenn **E1 oder E2** eintreten (mindestens eines tritt ein oder beide).
- **Wenn $E_1 \cap E_2 = \{\ \}$**, dann folgt **$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1)+P(E_2)$**
- **Additionsatz**: **$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$**, wenn **$E_1 \cap E_2 \neq \{\ \}$.**

***Beispiel**: Man betrachtet folgende Ereignisse beim Würfeln:*
E1: „Es kommt 1 oder 3“;
E2: „Es kommt eine Zahl kleiner 4“;
E3: „Es kommt eine ungerade Zahl“.
Beschreiben Sie sowohl mit Worten als auch mit Hilfe von E1, E2, E3, ‘, ∩ und ∪ die folgenden Ereignisse und geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten an. Geben Sie weiters an, welches Ereignis welches andere nach sich zieht.
- Alle drei Ereignisse treten ein
- Keines der Ereignisse tritt ein
- E1 und E2 treten ein,E3 aber nicht
- Mindestens ein Ereignis tritt ein
- E1 und E3 treten nicht ein, E2 tritt ein

Lösung:
Alle drei Ereignisse E1, E2, E3 sind Ereignisse des Ergebnisraumes Ω = {1;2;3;4;5;6}.

E1={1;3}	*E2={1;2;3}*	*E3={1;3;5}*
$\mathrm{P(E1)} = \frac{2}{6} = 0{,}3333 = 33{,}33\%$	$\mathrm{P(E2)} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$	$\mathrm{P(E3)} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Alle drei Ereignisse treten ein: *E1 ∩ E2 ∩ E3 ={1;3}= E1*

P(E1 ∩ E2 ∩ E3)=0,33333 => 33,33%

Keines der Ereignisse tritt ein: *(E1 ∪ E2 ∪ E3)'= { 1; 2; 3; 5 }'={ 4;6; }*

„Es kommt die Zahl 4 oder 6"

$\mathrm{P(E1 \cup E2 \cup E3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ $\mathrm{P([E1 \cup E2 \cup E3]')} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ = *33,33%*

E1 und E2 treten ein, E3 aber nicht: *E1 ∩ E2 ∩ E3'= { }; unmögliches Ereignis*

P(E1 ∩ E2 ∩ E3') = 0

Mindestens ein Ereignis tritt ein: *E1 ∪ E2 ∪ E 3 = {1;2;3;5 }*

$\mathrm{P(E1 \cup E2 \cup E3)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

E1 und E3 treten nicht ein, E2 tritt ein: *E1' ∩ E2 ∩ E3´ ={2}*

P(E1'∩ E2 ∩ E3´) = 0,16666 = 16,66%

Beispiel: Roulette (37 Felder)

E1: „Impair" (ungerade) = {1;3;5;7; ...;33;35}

E2: „Noir" (schwarz) = {2;4;6;8;10;11;13;15;17;20;22;24;26;28;29;31;33;35}

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ungerade oder schwarz kommt oder sogar beides.

<u>Lösung:</u>

Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit P(E1 ∪E2).

P(E1 ∪ E2) = {1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;13;15;17;19;20;21;22;23;24;25;26;27;28;29;31;33;35}

$\mathrm{P(E1 \cup E2)} = \frac{28}{37} = 0{,}757$

Berechnung mittels Additionssatz:

$\mathrm{P(E1)} = \frac{18}{37}$

$\mathrm{P(E2)} = \frac{18}{37}$

Die Wahrscheinlichkeiten sind nicht 0,5, weil die Zahl Null auch mitspielt, aber keine Farbe hat und beim Roulette weder zu den geraden noch zu den ungeraden gezählt wird.

E1 ∩E2 = {11;13;15;17;29;31;33;35}

$\mathrm{P(E1 \cap E2)} = \frac{8}{37}$

$\mathrm{P(E1 \cup E2)} = \frac{18}{37} + \frac{18}{37} - \frac{8}{37} = \frac{28}{37} = 0{,}757$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

c. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen können durch zusätzliche Informationen geändert werden. Sie hängen vom Informationsstand ab. Somit kann sich die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E_1 ändern, wenn bekannt ist, dass ein Ereignis E_2 bereits eingetreten ist.

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E1 unter der Voraussetzung (Bedingung) eines anderen Ereignisses E2 heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit** P(E1|E2) und es gilt:

$$P(E1|\mathrm{E2}) = \frac{\mathrm{P(E1 \cap E2)}}{\mathrm{P(E2)}}$$

Die Berechnung von $P(E_1|E_2)$ ist aus der Laplace-Wahrscheinlichkeit erklärbar, denn durch die Voraussetzung des Eintretens von E_2, sind nur noch die Elemente von E_2 mögliche Elemente und die günstigen Fälle liegen in $E_1 \cap E_2$.

Beispiel:

250 Studentinnen und 330 Studenten besuchten eine Vorlesung.

Insgesamt haben 55% aller Studierenden die zugehörige Prüfung bestanden. 185 davon waren Studenten.

Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:

- Ein beliebig herausgegriffener Studierender ist männlich

- Ein beliebig herausgegriffener Studierender hat nicht bestanden

- Eine beliebig herausgegriffene Studentin hat bestanden

- Ein beliebig herausgegriffener erfolgreicher Absolvent ist weiblich

- Ein beliebig herausgegriffener Studierender ist ein nicht erfolgreicher Student

- Ein beliebig herausgegriffener Studierender ist weiblich

<u>Lösung:</u>

Um eine Verknüpfung mehrer Ereignisse zu veranschaulichen kann man eine „Vierfeldertafel“ zu Hilfenehmen. Hierbei gilt: 55% von 580 sind 319 erfolgreiche Studierende.

	Student	Studentin	gesamt
bestanden	185	319-185=134	319
nicht bestanden	330-185=145	250-134=116	580-319=261
gesamt	330	250	580

Studierender ist männlich: *P(männlich)* = $\frac{330}{580} = 0{,}57$

Studierender hat nicht bestanden: *P(nicht bestanden)* = $\frac{261}{580} = 0{,}45$

Studentin hat bestanden: *P(bestanden unter der Bedingung „Studentin“)* =$\frac{134}{250} = 0{,}536$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Erfolgreicher Absolvent ist weiblich: *P(weiblich unter der Bedingung „bestanden“)* $=\frac{134}{319} = 0{,}42$

Studierender ist ein nicht erfolgreicher Student: *P(nicht bestanden und Student)* $=\frac{145}{580} = 0{,}25$

Studierender ist weiblich: *P(weiblich)* = $\frac{250}{580} = 0{,}431$

d. Begriff der statistischen Wahrscheinlichkeit

In den meisten Versuchen und Wahrscheinlichkeitsproblemen liegen keine symmetrischen Zufallsgeräte vor und es ist somit meist keine Gleichwahrscheinlichkeit gegeben. In solchen Fällen machte schon Bernoulli den Vorschlag, Versuchsreihen durchzuführen und aus der relativen Häufigkeit eines Ereignisses (siehe „Statistik) auf die Wahrscheinlichkeit von diesem Ereignis zu schließen.
Tritt ein Ereignis E unter n Versuchen einer Versuchsreihe (Zufallsversuch mehrmals unter gleichen Bedingungen durchgeführt) k-Mal ein, so gilt für die relative Häufigkeit des Ereignisses E unter diesen n Versuchen:

$$P(E) = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{n}}$$

Beispiel:
Eine Befragung von 10 000 Autofahrern ergab, dass 5248 bisher unfallfrei unterwegs waren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig auf der Straße ausgewählter Autofahrer bisher unfallfrei?
$\mathrm{P(unfallfei)} = \frac{5248}{10000}$ = 0,5248 => 52,48%

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Wahrscheinlichkeitsrechnung 1

(1)

	Österreich	Burgenland	Kärnten
Fam. mit 0 Kindern	677.800	22.800	35.900
Fam. mit 1 Kind	672.200	22.300	47.700
Fam. mit 2 Kindern	493.900	20.300	40.800
Fam. mit 3 Kindern	170.400	7.100	15.000
Fam. mit 4 od. mehr K.	72.900	1.600	5.600
Kinder in Fam. mit 4 oder mehr Kindern	323.000	7.100	25.400
Fam. insgesamt	2.087.200	74.200	144.900
Kinder insgesamt	2.494.300	91.400	199.600

a. Mit welcher W. stammt eine österreichische Familie aus Kärnten und hat mindestens 2 Kinder?
b. Wo findet man eher eine Familie mit 4 Kindern, im Burgenland oder in Kärnten?
c. Liegt der relative Anteil der kinderlosen Familien in Kärnten unter oder über dem österr. Wert?
d. Mit welcher W. ist ein österr. Kind kein Einzelkind?
e. Mit welcher W. stammt in Kärnten ein Kind aus einer Familie mit 2 Kindern?
f. Mit welcher W. hat eine öst. Familie mindestens 2 Kinder?
g. Eine öst. Familie hat 3 Kinder. Mit welcher W. wohnt sie in Kärnten?
h. Liegt der relative Anteil der Familien mit mindestens 4 Kindern in Kärnten unter oder über dem österr. Wert?
i. Mit welcher W. hat ein Kärntner Kind keine Geschwister?
j. Mit welcher W. hat ein öst. Kind mindestens 2 Geschwister?

[a) 2,9% c) K 24,8% - Ö 32,5% d)73,0% e) 40,9% f) 35,3% g) 8,8% h) 3,9 : 3,5 i) 23,9% j) 33,4%]

(2) Mit einem Würfel wird einmal gewürfelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) die Augenzahl ungerade, [50%]
b) die Augenzahl gerade, [50%]
c) die Augenzahl durch 3 teilbar, [33,33%]
d) die Augenzahl mindestens 2 ist. [83,33%]
e) die Augenzahl gerade und kleiner als 4 ist. [16,67%]
f) die Augenzahl ungerade und größer als 2 ist. [33,33%]
g) die Augenzahl mindestens 2 ist. [83,33%]
h) die Augenzahl gerade oder größer als 4 ist. [66,67%]
i) die Augenzahl ungerade oder mindestens 3 ist. [83,33%]

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

(3) Die 628 Beschäftigten eines Unternehmens verteilen sich folgendermaßen auf die Gruppen Frauen-Männer und Raucher-Nichtraucher: 329 Männer, davon 189 Raucher, 299 Frauen, davon 101 Raucher. Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

a) Ein Beschäftigter ist Raucher,	[46,18%]
b) Ein männlicher Beschäftigter ist Raucher,	[57,44%]
c) Ein Raucher ist weiblich,	[34,83%]
d) Ein Beschäftigter ist weiblich,	[47,61%]
e) Ein weiblicher Beschäftigter ist Nichtraucher.	[66,22%]

(4) Eine Untersuchung von 10000 Studenten auf Geschlecht (weiblich-männlich) und Augenfarbe (blau-nicht blau) führte zu folgendem Ergebnis: 4295 Frauen, davon 1076 mit blauen Augen sowie 1420 Männer mit blauen Augen. Berechnen Sie für folgende Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten:

a) Ein Student hat blaue Augen,	[24,96%]
b) Ein Student ist männlich,	[57,05%]
c) Ein Student mit blauen Augen ist männlich,	[56,89%]
d) Ein weiblicher Student hat keine blauen Augen,	[74,95%]
e) Ein blauäugiger Student ist weiblich.	[43,11%]

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

e. Baumdiagramme (mehrstufige Versuche)

Besteht ein Versuch aus mehreren Teilversuchen, so liegt ein mehrstufiger Versuch vor, und es ist oft von Vorteil, die Abläufe der Teilversuche an Hand eines **Baumdiagramms** graphisch darzustellen. Die Kanten eines Baumdiagramms weisen von einem Startpunkt zu den möglichen Ergebnissen (Ausfällen) des Versuchs. Jedem **Pfad** in einem Baumdiagramm entspricht ein Ausfall des Versuchs. Es gibt so viele Ausfälle des Versuchs wie Pfade im Graphen. Zu den einzelnen Teilversuchen werden jeweils die Wahrscheinlichkeit angeschrieben.

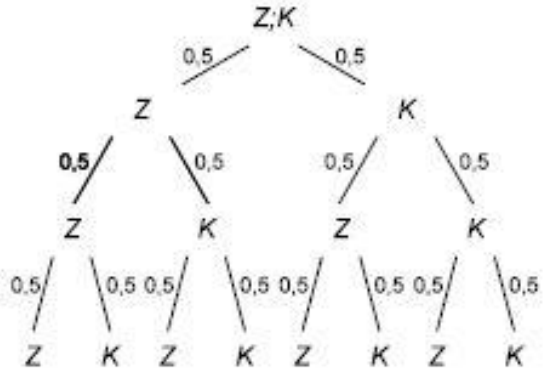
***Beispiel**: Eine Münze (Z;K) wird drei Mal geworfen. Stellen Sie alle möglichen Ausfälle des Versuchs dar.*
Wie viele sind es?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt jeder dieser Ausfälle ein?

Ausgangssituation:

1. Wurf:

2. Wurf:

3. Wurf:



Jeder Teilversuch hat 2 Ausfälle - es gibt
3 Teilversuche: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$
Da jeder Ausfall gleichwahrscheinlich ist, ist die Wahrscheinlichkeit: $P(E) = \frac{1}{8}$

Satz:
Besteht ein Versuch aus k Teilversuchen, die tatsächlich oder in Gedanken nacheinander ausgeführt werden und seien n1, n2, n3, ..., nk die Anzahl der Ausfälle der Teilversuche, so hat der Gesamtversuch n1· n2· n3· ... ·nk Ausfälle.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

***Beispiel**: Eine Autotype ist in zwei Motorstärken (M1;M2) mit oder ohne Klimaanlage (K1;K2), mit drei verschiedenen Sitzbezügen (S1;S2;S3) und in 4 Farben (F1;F2;F3;F4) erhältlich.*
Wie viele Ausführungen sind möglich?
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zufälliger Auswahl eine bestimmte Ausführung zu erhalten?

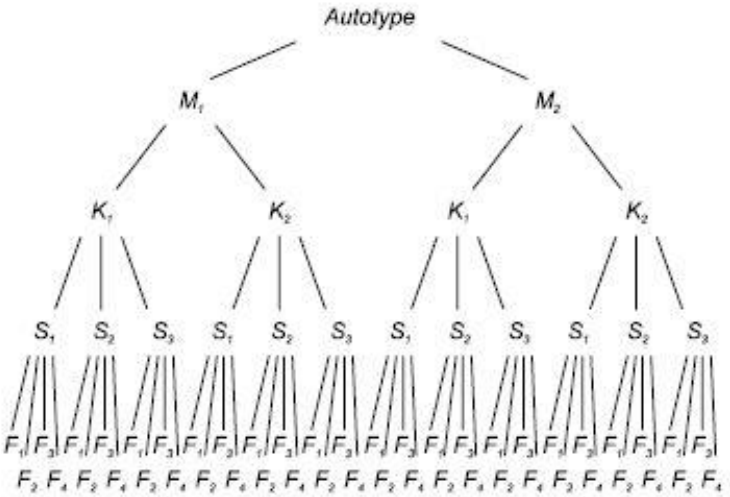
Ausgangssituation:

1. Auswahl P(M)= $\frac{1}{2}$:

2. Auswahl P(K)= $\frac{1}{2}$:

3. Auswahl P(S) = $\frac{1}{3}$:

4. Auswahl P(F) = $\frac{1}{4}$:



Anzahl der verschiedenen Ausführungen: *2·2·3·4 = 48*
Jede Ausführung ist gleichwahrscheinlich. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ausführung: P(A)= $\frac{1}{48}$

Die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Ausführung - z.B. mit der ersten Motorstärke M1 mit Klimaanlage K1, Sitzbezug S2 und Farbe F3 - lässt sich auch aus den Pfadwahrscheinlichkeiten berechnen:

$$\mathrm{P(M1 \cap K2 \cap S2 \cap F3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

Nicht immer sind alle Ausfälle gleichwahrscheinlich und es ist daher nicht möglich aus der Gesamtzahl der Ausfälle auf die Einzelwahrscheinlichkeit zu schließen.

1. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit einer geordneten Stichprobe (eines Ausfalls) ist das Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

2. Pfadregel: Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der zugehörigen Pfadwahrscheinlichkeiten.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

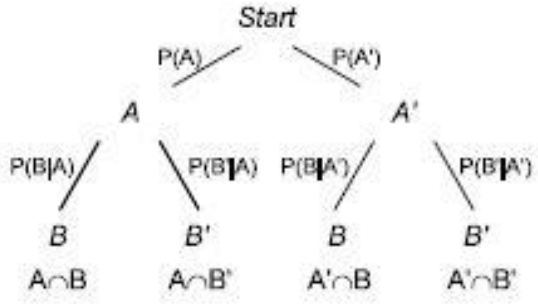
Allgemein:

Hat ein Teilereignis E_1 die Ausfälle (A,A') und ein Teilereignis E_2 die Ausfälle (B,B') so sieht das Baumdiagramm folgendermaßen aus:

Ausgangssituation:

1. Stufe E_1:

2. Stufe E_2:



***Beispiel**: Es wurde ein Test zur Erkennung einer bestimmten Krankheit entwickelt. In 98% aller Krankheitsfälle ist das Testergebnis positiv. Allerdings zeigt der Test mit 0,8% Wahrscheinlichkeit auch ein positives Resultat, obwohl die untersuchte Person gesund ist. Aus statistischen Erhebungen schätzt man, dass 3% der Bevölkerung an der Krankheit leiden. Berechnen Sie folgende Wahrscheinlichkeiten:*

- Eine zufällig herausgegriffene Person hat positiven Test und ist krank.

- Ein zufällig herausgegriffener Kranker hat negativen Test.

- Eine zufällig herausgegriffene Person hat negativen Test.

- Eine zufällig herausgegriffene Person einen negativen Test aufweist und trotzdem krank ist.

<u>Lösung:</u>

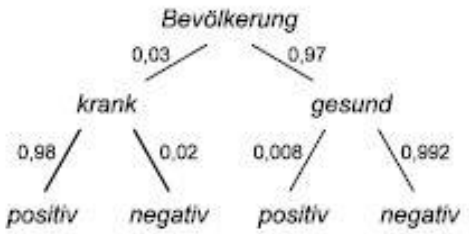
Man kennt aus der Angabe:

P(positiv|krank) = 0,98 und daher	P(negativ|krank) = 1−0,98 = 0,02
P(positiv|gesund) = 0,008 und daher	P(negativ|gesund) = 1−0,002 = 0,992
P(krank) = 0,03 und daher	P(gesund) = 1−0,03 = 0,97

Baumdiagramm:

1. Stufe tatsächlicher Gesundheitszustand:

2. Stufe Testergebnis:



- P(positiv ∩ krank) = 0,03·0,98 = 0,0294

Mit 2,94%iger Wahrscheinlichkeit ist eine Person krank und hat ein positives Testergebnis.

- P(negativ|krank) = 0,02

Mit 2%iger Wahrscheinlichkeit ist der Test eines Kranken negativ.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

- P(negativ) = P(krank ∩ negativ) + P(gesund ∩ negativ) =
0,03·0,02 + 0,97·0,992 = 0,0006 + 0,96224 = 0,96284
Mit 96,28%iger Wahrscheinlichkeit ist das Testergebnis negativ.

- $P(\text{krank}|\text{negativ}) = \frac{\text{P(krank} \cap \text{negativ)}}{\text{P(negativ)}} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}02}{0{,}96284} = 0{,}00062$

Mit nur 0,06 %iger Wahrscheinlichkeit wird mit dem Test diese Krankheit nicht erkannt (d.h. das Testergebnis ist negativ - trotzdem ist die Person krank).

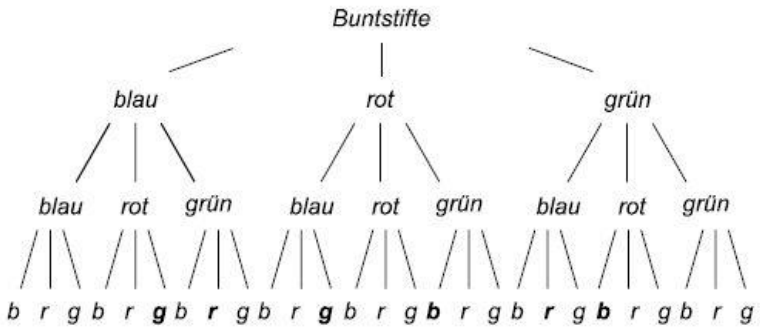
Beispiel: Aus einer Lade mit 10 blauen, 5 roten und 6 grünen Buntstiften wird 3 Mal blind gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen roten, einen blauen und einen grünen Stift zu ziehen mit Zurücklegen bzw. ohne Zurücklegen?

<u>Lösung:</u>
Baumdiagramm:

1. Ziehung:

2. Ziehung:

3. Ziehung:



Es gibt 6 günstige Pfade. Diese Anzahl ergibt sich außer durch Abzählen im Baumdiagramm.

Versuch mit Zurücklegen:

Es gilt immer P(blau) $=\frac{10}{21}$;P(rot) = $\frac{5}{21}$;P(grün) = $\frac{6}{21}$

Wahrscheinlichkeit für einen Pfad: *P(blau ∩ rot ∩ grün)* = $\frac{10}{21}\frac{5}{21}\cdot\frac{6}{21}\cdot$ = *0,0324*

Wahrscheinlichkeit für alle 6 Pfade: P(blau, rot, grün in bel. Reihenfolge) = 6 ·0,0324 = 0,1944

Versuch ohne Zurücklegen:

Das Baumdiagramm für den Fall „ohne Zurücklegen“ sieht gleich aus, nur die Wahrscheinlichkeiten für die zweite und dritte Ziehung ändern sich, da diese Teilversuche jeweils von der vorangegangenen Ziehung abhängen. Die Zahl der in der Lade befindlichen Buntstifte ändert sich nämlich mit jedem Zug und damit die Anzahl der möglichen Fälle.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Es gilt für einen Pfad:

P(blau ∩ rot ∩ grün)= $\frac{10}{21} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$

P(blau ∩ grün ∩ rot)= $\frac{10}{21} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$

P(rot ∩ blau ∩ grün)= $\frac{5}{21} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{6}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$

P(rot ∩ grün ∩ blau)= $\frac{5}{21} \cdot \frac{6}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$

P(grün ∩ rot ∩ blau)= $\frac{6}{21} \cdot \frac{5}{20} \cdot \frac{10}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$

P(grün ∩ blau ∩ rot)= $\frac{6}{21} \cdot \frac{10}{20} \cdot \frac{5}{19} = \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21}$

Wahrscheinlichkeit für alle 6 Pfade:

P(blau, rot, grün in bel. Reihenfolge)= $6 \cdot \frac{300}{19 \cdot 20 \cdot 21} = 0{,}2256$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Wahrscheinlichkeitsrechnung 2

(1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel

a) keine 6 zu werfen, [83,33%]

b) dreimal hintereinander eine 6 zu werfen, [0,46%]

c) dreimal hintereinander keine 6 zu werfen, [57,87%]

d) bei dreimaligem Würfeln mindestens eine 6 zu werfen. [42,13%]

(2) Eine Versuchsperson soll aus drei Urnen je eine Kugel ziehen. Die erste Urne enthält 12 weiße und 20 schwarze Kugeln, die zweite 5 weiße und 15 schwarze, die dritte 6 weiße und 2 schwarze. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von

a) drei weißen Kugeln, [7,03%]

b) mindestens einer weißen Kugel, [88,28%]

c) genau zwei weißen Kugeln. [35,16%]

(3) Jemand spielt in drei Lotterien mit einem Los. Die erste Lotterie hat bei 3000 Losen 1500 Gewinne, die zweite bei 2000 Losen 900 Gewinne und die dritte bei 4000 Losen 1700 Gewinne. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Spieler

a) in alle drei Lotterien gewinnt, [9,56%]

b) in mindestens einer Lotterie gewinnt, [84,19%]

c) in genau einer Lotterie gewinnt. [40,44%]

(4) Bei einer Epidemie erkranken 12% der Bevölkerung einer Stadt. Bei 4% der Erkrankten verläuft die Erkrankung tödlich. Es sterben aber auch 0,1% der gesunden Bevölkerung. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

a) ein Bürger der Stadt von der Epidemie befallen wird und stirbt, [0,48%]

b) ein Bürger der Stadt stirbt, [0,568%]

c) ein kranker Bürger der Stadt überlebt, [96%]

d) ein gestorbener Bürger nicht krank war. [15,5%]

(5) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in Familien mit drei Kindern eine Familie

a) ohne Mädchen ist, [12,5%]

b) mit einem Mädchen ist, [37,5%]

c) mit 2 Mädchen ist, [37,5%]

d) mit drei Mädchen ist, [12,5%]

wenn die Geburt eines Knaben und eines Mädchens gleichwahrscheinlich ist.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

2. Kombinatorik

In vielen Fällen – man denke an das Zahlenlotto 6aus 45 - ist es nicht oder nur mit großem Aufwand möglich, die Anzahl der günstigen und möglichen Fälle zu ermitteln, z.B. die Anzahl der richtigen Dreier.
Daher beschäftigt sich der erste Abschnitt in diesem Kapitel mit dem Ermitteln derartiger Anzahlen, mit der sogenannten Kombinatorik. Die Kombinatorik ist „die Kunst des Zählens ohne tatsächlich zu zählen“ und ist somit ein Hilfsmittel für die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Vor allem bei mehrstufigen Versuchen - d.h. Versuchen, die aus mehreren Teilversuchen bestehen, die nacheinander oder gleichzeitig durchgeführt werden - treten oft verschiedene Ereignisse auf mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit. Für die Angabe der Wahrscheinlichkeit ist die Kenntnis der genauen Zahl aller möglichen Ereignisse nötig. Das Aufschreiben und Abzählen aller Ereignisse ist aber besonders bei großer Versuchszahl überaus mühsam und kann wesentlich einfacher durch kombinatorische Formeln ersetzt werden.

a. Produktregel

Die Gesamtanzahl der Möglichkeiten ergibt sich als **Produkt aus der Anzahl der Möglichkeiten, die bei jeder Entscheidung getroffen werden kann.**

Beispiel:
Anna hat 7 Röcke und 3 Blusen. Wie viele Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es?
$7 \cdot 3 = 21$

Beispiel:
Eine Einbauküche ist mit vier verschiedenen Fronttypen, 10 verschiedenen Griffarten und mit drei verschiedenen Gerätekombinationen lieferbar. Wie viele verschiedene Ausstattungsmerkmale gibt es?
$4 \cdot 10 \cdot 3 = 120$

Beispiel:
Berechne die Anzahl aller vierstelligen Zahlen, die sich mit den Ziffern 1 bis 9 bilden lassen, wenn in jeder dieser vierstelligen Zahlen keine Ziffer mehrfach auftritt!
$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

b. Der Begriff „Faktorielle“

Da Berechnungen im Rahmen der Kombinatorik immer wieder zu einer bestimmten Produktbildung führen, soll die folgende vereinfachte Schreibweise am Beginn dieses Abschnitts stehen.

Def.:
Das Produkt **$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = n!$** heißt **„n Faktorielle“** oder **„n Fakultät“.**

Beispiel: $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$

Taschenrechner mit x! - Taste

Def.: $0! = 1$ **Satz:** $n \cdot (n-1)! = n!$

Beispiele:
2!=

8!=

9!=

0!=

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

c. Permutationen

Permutationen (permutare, lat. ... vertauschen) sind Vertauschungen von Elementen. Abhängig davon, ob die Elemente alle unterschiedlich sind oder nicht, spricht man von Permutationen mit oder ohne Wiederholung.

i. Permutation von n verschiedenen (d.h. unterscheidbaren) Elementen = <u>Permutation ohne Wiederholung</u>

Beispiel:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Personen in einer Reihe aufzustellen?
Für den ersten Platz stehen 10 Personen zur Verfügung 10 Möglichkeiten
Für den zweiten Platz stehen 9 Personen zur Verfügung 9 Möglichkeiten
Für den dritten Platz stehen 8 Personen zur Verfügung 8 Möglichkeiten
… …
Für den zehnten (letzten) Platz steht nur noch 1 Person zur Verfügung 1 Möglichkeit

Insgesamt $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = 10!$ verschiedene Möglichkeiten Es gibt 10! Möglichkeiten.
Die Tatsache, dass es sich um Permutationen lauter verschiedener Elemente handelt, bezeichnet man als **Permutation ohne Wiederholung**.

Die Anzahl der Permutationen von n Elementen ohne Wiederholung ist $P_n = n!$

Beispiel:
Auf wie viele Arten können sich 4 Leute auf vier Sessel sitzen?
$4! = 24$ Möglichkeiten

Beispiel:
Auf einem Bücherbrett stehen Bücher. Auf wie viele Arten kann man 6 Bücher anordnen?
$6! = 720$ Möglichkeiten

Beispiel:
Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus 11 Spielern. Die 11 Spieler verlassen vor Spielbeginn der Reihe nach die Mannschaftskabine. Wie viele verschiedene Reihenfolgen sind dabei möglich?
$11! = 39\,916\,800$ Möglichkeiten

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

ii. Permutation von n Elementen, von denen jeweils k1, k2, ... km nicht unterscheidbar sind = <u>Permutation mit Wiederholung</u>

Beispiel:

7 Männer, 4 Frauen und 5 Kinder sollen unterschiedlich in einer Reihe aufgestellt werden, wobei nicht zwischen den einzelnen Männern, Frauen und Kindern unterschieden werden soll.

n = 7 + 4 + 5 = 16

Bei dieser Aufgabe sind nicht alle 16! = $2{,}092279 \cdot 10^{13}$ Möglichkeiten der Anordnung wirklich verschieden, denn es gibt 7! Möglichkeiten, bei denen nur die Männer untereinander Plätze tauschen und somit nicht die Gesamtanordnung von Männern in Platzbezug auf Frauen und Kinder geändert wird. Analoges gilt für 4! Möglichkeiten der Frauenplatzwechsel und 5! Möglichkeiten des Kinderplatzwechsels.

Es gibt also „nur“ $\frac{16!}{7! \cdot 4! \cdot 5!} = 1\,441\,440$ mögliche Anordnungen von Männern, Frauen und Kindern, die in dieser Aufgabe wirklich als verschieden anzusehen sind.

Die Anzahl der **Permutationen von n Elementen mit Wiederholung** ist

Pn= $\frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{k1}! \cdot \boldsymbol{k2}! \cdot \boldsymbol{k3}! \cdot \ldots}$, k1,k2,k3 sind die Anzahl der sich wiederholenden Elemente

Beispiel:

Auf wie viele Arten können die Buchstaben des Wortes „AFFE“ angeordnet werden?

$\frac{4!}{2!} = 12$

Beispiel:

Der Eilzug E770 besteht aus 5 Waggons. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es, wenn man

a) alle Waggons aufgrund der unterschiedlichen Wagennummer unterscheidet? 5!=120

b) die drei reinen 2. Klasse-Waggons nicht voneinander unterscheidet? $\frac{5!}{3!} = 20$

Beispiel:

Wie viele siebenstellige Telefonnummern kann man aus drei Fünfern und vier Sechsern bilden?

$$\frac{7!}{3! \cdot 4!} = 35$$

Beispiel:

In einer Schachtel befinden sich 4 gute und 4 schlechte Äpfel. Wie viele Möglichkeiten gibt es beim zufälligen Ziehen der Äpfel, wenn jeweils 4 gute und 4 schlechte nicht unterscheidbar sind?

$$\frac{8!}{4! \cdot 4!} = 70$$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Zusammenfassend sind folgende Eigenschaften für das Anwenden der Formeln für Permutationen typisch:

- Aus n Elementen werden alle n Elemente einbezogen **„n aus n“**
- Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist entscheidend **„Reihenfolge: ja“**
- Abhängig von der Unterscheidbarkeit der Elemente gibt es Permutationen mit und ohne Wiederholungen **„Wiederholung: ja / nein“**

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

d. Variationen

Will man aus einer Gesamtheit von **n verschiedenen Elementen** geordnete **Stichproben** bestehend **aus k Elementen** entnehmen, so spricht man von **Variationen.**

Abhängig davon, **ob die einzelnen Elemente zwischen den Ziehungen zurückgelegt werden**, spricht man von **Variationen mit oder ohne Wiederholungen.**

i. Variationen ohne Wiederholung = <u>Variationen ohne Zurücklegen</u>

(= Ziehen **ohne** Zurücklegen **mit** Beachtung der Reihenfolge)

Beispiel:
In einem Verein sollen aus 20 Personen die Ämter des Obmanns, des Stellvertreters, des Schriftführers und des Kassiers besetzt werden.
Wie viele Möglichkeiten gibt es?

Für den Obmann gibt es anfangs 20 Möglichkeiten aus den 20 Personen zu wählen. Da es keine Doppelbesetzungen geben kann, gibt es für den Stellvertreter nun nur noch 19 Möglichkeiten, dann weiterführend für den Schriftführer nur noch 18 Möglichkeiten und letztendlich für das Amt des Kassiers stehen noch 17 Personen zur Verfügung.
Es gibt als $20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280$ Möglichkeiten zur Besetzung der Posten.
Verwendet man die Fakulätsschreibweise, ergibt sich:

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = \frac{20!}{16!} = \frac{20!}{(20-4)!}$$

Will man aus einer Gesamtheit von n verschiedenen Elementen geordnete Stichproben bestehend aus k (k<n) Elementen entnehmen und legt die Entnommenen nicht zurück, so gibt es also $\frac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene geordnete Stichproben vom Umfang k.

Die Zahl der Variationen von k Elementen aus n Elementen ohne Wiederholung ist:

$$V^k_n = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel:
Eine Fußballmannschaft besteht bekanntlich aus 11 Spielern Der Trainer entscheidet sich dafür, 5 Spieler der Mannschaft für das Elfmeterschießen auszuwählen und gleichzeitig die Reihenfolge festzulegen, in welcher die 5 Spieler zum Elfmeter antreten sollen. Wie viele Möglichkeiten gibt es für dieses Auswahlverfahren?

$$\frac{11!}{(11-5)!} = \frac{11!}{6!} = 55440$$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Beispiel:
Bestimme die Möglichkeiten der Belegung der ersten drei Plätze bei einem Pferderennen, an dem 5 Pferde teilnehmen!

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

ii. Variationen mit Wiederholung = <u>Variationen mit Zurücklegen</u>
(=Ziehen **mit** Zurücklegen **mit** Beachtung der Reihenfolge)

Beispiel:
Aus einer Gruppe von 10 Personen sollen für 3 kleinere Aufgaben einzelne Personen ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür, wenn theoretisch auch ein und dieselbe Person alle 3 Aufgaben übernehmen kann?

Für die erste Aufgabe gibt es 10 Möglichkeiten aus den 10 Personen zu wählen. Für die zweite Aufgabe kann wieder aus allen 10 Personen gewählt werden, es gibt es wieder 10 Möglichkeiten. Da jede der ersten 10 Möglichkeiten mit den zweiten 10 Möglichkeiten kombiniert werden kann, gibt es bis hierher also $10 \cdot 10 = 100$ Möglichkeiten. Da es für die dritte Aufgabe wieder 10 Möglichkeiten gibt, können die 100 bisherigen Fälle mit jeder dieser 10 letzten Möglichkeiten kombiniert werden. Insgesamt gibt es also $10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 = 1000$ Möglichkeiten.

Die Zahl der Variationen von k Elementen aus n Elementen mit Wiederholungen ist:

$$V^k_n = n^k$$

Beispiel:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen Totoschein auszufüllen?

3 „Elemente“ = Tips: Tip 1; Tip 2; Tip X; n=3
12 „Stichproben“ = Spiele; k=12
$3^{12} = 531441$ Möglichkeiten

Zusammenfassend sind folgende Eigenschaften für das Anwenden der Formeln für Variationen typisch:

- Aus n Elementen werden k Elemente einbezogen **„k aus n“**
- Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist entscheidend **„Reihenfolge: ja“**
- Abhängig von der Möglichkeit des mehrmaligen Vorkommens der Elemente gibt es Variationen mit und ohne Wiederholungen **„Wiederholung: ja / nein“**

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

e. Kombinationen

Bei ungeordneter Stichprobe kommt es nicht auf die Reihenfolge der ausgewählten Elemente an, d.h. die Auswahl „a-b-c“ ist identisch mit der Auswahl „b-a-c“ oder „a-c-b“ usw. Eine Stichprobe dieser Art bezeichnet man als Kombination. Abhängig davon, ob die einzelnen Elemente zwischen den Ziehungen zurückgelegt werden, spricht man von Kombinationen mit oder ohne Wiederholungen.

Kombinationen ohne Wiederholung
(= Ziehen ohne Zurücklegen **ohne Beachtung der Reihenfolge**)

Die Zahl der Variationen von k Elementen aus n Elementen ist durch V^k_n gegeben. Ist nun die Reihenfolge der Anordnung der k Elemente nicht wesentlich, so sind all jene Variationen ident, die aus denselben k Elementen bestehen. Bei k ausgewählten verschiedenen Elementen gibt es k! Möglichkeiten, diese Elemente zu vertauschen (permutieren). Daher bestimmen jeweils k! geordnete Stichproben ein und dieselbe ungeordnete Stichprobe. Dividiert man also die Zahl der Variationen durch k!, so erhält man die Zahl der entsprechenden Kombinationen und daher gilt:

Die Zahl der Kombinationen von k Elementen aus n Elementen ohne Wiederholung ist:

$$K^k_n = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$ .....**Binomialkoeffizient**

Satz:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{0} = 1$$

Beispiel:

Bestimme $\binom{5}{3}$!

$\binom{5}{3} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \mathbf{10}$

Beispiel:

6 Personen sitzen bei einer Tischrunde und trinken Sekt.
Wie oft klingen die Gläser, wenn sie einander alle zuprosten?

Es werden jeweils Stichproben vom Umfang 2 ohne Wiederholung ausgewählt, da je zwei Personen miteinander anstoßen, aber niemand mit sich selbst. Außerdem gilt „a-b“ ist „b-a“ und es handelt sich daher um eine ungeordnete Stichprobe mit n = 6, k = 2:

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$$

Die Gläser klingen 15 mal.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Beispiel:
Wie viele Möglichkeiten gibt es, einen „6 aus 45“-Lottoschein auszufüllen?

Die Reihenfolge der 6 gezogenen Kugeln ist egal (ungeordnete Stichprobe). Die einzelnen Kugeln werden nicht zurückgelegt (ohne Wiederholung). Daher ist n=45, k=6:

$$\binom{45}{6} = \frac{45!}{39! \cdot 6!} = 8\,145\,060$$

Es gibt 8 145 060 Möglichkeiten.

Beispiel:
a) Wie viele verschiedene richtige Dreier kann es nach einer Lottoziehung geben?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit einen Dreier zu haben?

a) Es stellt sich also vorerst die Frage, auf wie viele Arten man 3 Zahlen aus den 6 richtigen ziehen kann. Diese Anzahl kann man mit allen Möglichkeiten kombinieren, die es gibt, um die weiteren 3 Zahlen aus den verbleibenden 39 unrichtigen Zahlen.
Die gesuchte Anzahl ist daher:

$$\binom{6}{3} \cdot \binom{39}{3} = 20 \cdot 9139 = 182\,780$$

Es gibt 182780 mögliche Dreier.

b) Aus dem vorherigen Beispiel kennen wir die Anzahl aller möglichen Tipps mit 8 145 060. Wir haben aus a) die für uns günstigen Möglichkeiten, daher ist
P(Dreier)=$\frac{182780}{8145060} = 0{,}02244$ => 2,24%

Beispiel:
In einer Urne sind 10 Kugeln mit den Nummern 1 bis 10. Es werden **mit einem Griff** 6 Kugeln gezogen (Die Reihenfolge zählt daher nicht). Wie viele Möglichkeiten gibt es?

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$

Zusammenfassend sind folgende Eigenschaften für das Anwenden der Formeln für Kombinationen typisch:
- Aus n Elementen werden k Elemente einbezogen **„k aus n“**
- Die Reihenfolge der Anordnung der n Elemente ist nicht entscheidend **„Reihenfolge: nein“**

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Wahrscheinlichkeitsrechnung 3

(1)Wie viel verschiedene Sitzplatzanordnungen gibt es in einer Klasse mit 12 Schülern und 12 Plätzen? [479 001 600]

(2)Auf wie viele Arten kann man 9 Kugeln anordnen, wenn 5 Kugeln weiß und 4 rot sind?[126]

(3)Wie viele Buchstabenanordnungen des Wortes HONOLULU gibt es? [5040]

(4)Auf wie viele verschiedene Arten können 9 Personen um einen runden Tisch Platz nehmen? [362 880]

(5)In einer Klausur müssen zwei von vier zur Wahl gestellten Aufgaben bearbeitet werden. Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich? [6]

(6)Jemand hat die aus massivem Gold hergestellten Ziffern 1, 9, 8 und 7 geerbt; wie viele verschiedene vierstellige Zahlen kann er bilden? [24]

(7)16 Personen wollen mit einem Autobus fahren, der genau 5 freie Plätze hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 5 Plätze zu besetzen, wenn die verschiedenen Anordnungen der Personen nicht berücksichtigt werden? [4368]

(8)Berechne die Anzahl der verschiedenen Würfe, die man mit 3 (unterscheidbaren) Würfeln erzielen kann. [216]

(9)Aus einer Menge von 20 Pferden sollen 8 Pferde ausgewählt werden, die an einem Rennen teilnehmen. Auf wie viele Arten kann man dies tun? [125 970]

(10)Frau Maier will ihre 5 Kinder in einer Reihe anordnen für eine Gruppenaufnahme. Auf wie viele Arten kann sie dies tun? [120]

(11)16 Personen wollen mit einem Autobus fahren, der genau 5 freie Plätze hat. Wie viele Möglichkeiten gibt es die 5 Plätze zu besetzen, wenn die verschiedenen Anordnungen der Personen berücksichtigt werden? [524 160]

(12)In einer Urne liegen 10 Kugeln mit den Nummern 1 bis 10.
Man zieht nacheinander 6 Kugeln ohne Zurücklegen und notiert ihre Nummern in der Reihenfolge, in der sie erscheinen. Wie viele Möglichkeiten gibt es? [151 200]

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

(13)Zwei von 29 Schülern einer Klasse werden für den Tafeldienst ausgewählt. Wie viele verschiedene Kombinationen sind möglich? [406]

(14)In einen Urne liegen 10 Kugeln mit den Nummern 1 bis 10. Man zieht eine Kugel zufällig, notiert ihre Nummer in der Reihenfolge, in der sie erscheinen und legt sie dann wieder zurück. Wie viele verschiedene Zahlenfolgen sind möglich, wenn man 6-mal zieht? [1 000 000]

(15)Wie viele Möglichkeiten gibt es, um aus einer Menge von 13 Fußballspielern 11 Spieler auszuwählen?

[78]

(16)Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt man beim Lotto 6 aus 45

a) einen Sechser [0.0000122%]

b) einen Fünfer [0.00287%]

c) einen Vierer ? [0.1365%]

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

3. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

a. Zufallsvariable

In den vorangegangenen Abschnitten wurde jeweils die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ausfalls eines Zufallsversuchs berechnet. Ein Zufallsversuch hat immer mehrere bzw. sogar unendlich viele Ausfälle.

Eine Zufallsvariable X (Zufallsvariablen werden üblicherweise mit Großbuchstaben bezeichnet) ist also eine Größe, die - vom Zufall abhängig - reelle Zahlen x_i als Werte annimmt.

Beispiele für Zufallsvariable

- X = „Augenzahl eines Würfels“ x_i-Werte für X: x1 = 1, x2 = 2, ... x6 = 6
- X = „Zahl der 6er bei 5maligem Würfeln“ xi-Werte für X: x1 = 0, x2 = 1, ... x6 = 5
- X = „Anzahl der entdeckten Schmuggler an der Grenze bei einer Stichprobe vom Umfang 4“ xi-Werte für X: x1 = 0, x2 = 1, ... x5 = 4
- X = „Füllmenge einer 3kg Waschmittelpackung“ xi-Werte für X: xi ∈ [2,95;3,05]

Jeden Wert xi nimmt die Zufallsvariable X mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit P(X = xi) an. Die Wahrscheinlichkeiten für alle möglichen Werte xi nennt man Wahrscheinlichkeits-Verteilung der Zufallsvariablen X.

Im folgenden werden für die obigen angegebenen Beispiele die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen xi-Werte berechnet und die Unterschiede zwischen den einzelnen Zufallsvariablen und ihren Wahrscheinlichkeitsverteilungen aufgezeigt.

Beispiel: X = „Augenzahl eines Würfels“
xi-Werte für X: x1 = 1, x2 = 2, ... x6 = 6
P(X = 1) = $\frac{1}{6}$; P(X = 2) = $\frac{1}{6}$; ...; P(X = 6) = $\frac{1}{6}$

Bei dieser Verteilung handelt es sich um eine sogenannte **Gleichverteilung**, da jedem Ausfall die gleiche reelle Zahl zugeordnet wird.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Beispiel: X = „Anzahl der entdeckten Schmuggler an der Grenze bei einer Stichprobe vom Umfang 4“

xi-Werte für X: x1 = 0, x2 = 1, ... x5 = 4

Um die Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können muss man von einer bekannten Wahrscheinlichkeit ausgehen, die z.B. aus den Erfahrungen der Zöllner gewonnen werden kann; z.B. jeder 100. Grenzüberschreiter ist ein Schmuggler: P(Schmuggler) = $\frac{1}{100}$

P(X=0) = $\left(\frac{99}{100}\right)^4$ = 0,9696

P(X=1) = $\binom{4}{1}\ \left(\frac{1}{100}\right)\ \left(\frac{99}{100}\right)^3$ = 0,0388

P(X=2) = $\binom{4}{2}\ \left(\frac{1}{100}\right)^2\ \left(\frac{99}{100}\right)^2$ = 0,0006

P(X=3) = $\binom{4}{3}\ \left(\frac{1}{100}\right)^3\ \left(\frac{99}{100}\right)$ = 0,000004

P(X=4) = $\left(\frac{1}{100}\right)^4$ = 0,00000001

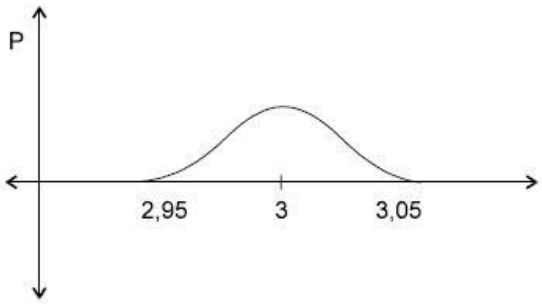
Dieses Binomialverteilungsbeispiel verdeutlicht, dass diese Verteilung mit dem Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen vergleichbar ist, da die Wahrscheinlichkeit stets unverändert 0,01 ist.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Beispiel: X = „Füllmenge einer 3kg Waschmittelpackung“

xi-Werte für X: xi $\in$ [2,95;3,05]

Für dieses Beispiel sind ohne weitere Information keine Wahrscheinlichkeiten für die (unendlich vielen) xi-Werte nennbar. Üblicherweise sollte jedoch die Wahrscheinlichkeit bei der Sollmenge 3kg am größten sein und bei größeren Abweichungen davon möglichst gegen Null streben.



Der Graph dieser Verteilung verläuft nach der Gaußschen Glockenkurve; es handelt sich bei der Verteilung um eine sogenannte **Normalverteilung**.

b. Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung

Je länger eine Liste von Variablenwerten wird (durch oftmalige Versuchsdurchführung treten die Werte der Zufallsvariablen mit größerer Häufigkeit auf), desto mehr nähert sich der Mittelwert der Liste dem sogenannten

Erwartungswert der Zufallsvariablen μ = E(X).	**= Wert mit der größten Wahrscheinlichkeit**
Varianz V(x)	**= Maß für die Abweichung vom Mittelwert**
Standardabweichung σ=$\sqrt{V(x)}$	**= Maß für die Abweichung vom Mittelwert**

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

c. Binomialverteilung

Voraussetzungen:

- **Diskrete Verteilung**: Für die Zufallsvariable sind nur natürliche Zahlen vorgesehen!
- Ein Versuch hat **genau 2 Ausfallsmöglichkeiten** E und E´ und die Wahrscheinlichkeit p für das Ereignis E ist bekannt.
- Der Versuch wird **n mal unter den gleichen Bedingungen** durchgeführt. (Ziehen mit zurücklegen)

Dann liegt eine Binomialverteilung vor.

Eine Zufallsvariable X heißt binomialverteilt mit den Parametern n und p, wenn gilt:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k \ (1-p)^{n-k}$$

n	……	Anzahl der Versuchsdurchführungen
p	……	Wahrscheinlichkeit für das Ereignis von Interesse
1-p	……	Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis

Es gilt für den **Erwartungswert** $E(X) = \mu = n \cdot p$

Varianz: $V(X) = \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}$

Beispiel: X = „Zahl der 6er bei 5maligem Würfeln“

a) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung für diese Verteilung!
b) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Versuchsausfälle?
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass 2 oder 3 6er kommen?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 3 6er kommen?
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens 4 6er kommen?

<u>Lösung:</u>

xi-Werte für X: x1 = 0, x2 = 1, ... x6 = 5

n = 5

p = $\frac{1}{6}$

a) $\mu = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0{,}833333$

$\sigma = \sqrt{5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 0{,}8333333$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

b) $P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0{,}4019$

$P(X=1) = \binom{5}{1} \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}4019$

$P(X=2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0{,}1608$

$P(X=3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0{,}0322$

$P(X=4) = \binom{5}{4} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = 0{,}0032$

$P(X=5) = \left(\frac{1}{6}\right)^5 = 0{,}0001$

c) $P(X=2 \text{ oder } X=3) = P(X=2) + P(X=3) = 0{,}1608+0{,}0322 = 0{,}193$

d) $P(\text{mind. 3 6er}) = P(X\geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = 0{,}0322 + 0{,}0032 + 0{,}0001 = 0{,}0355$

e) $P(\text{höchst. 4 6er}) = P(X\leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X=5) =$
$1 - 0{,}0001 = 0{,}9999$

Beispiel:

An einer Grenze werden Autos auf Schmuggel kontrolliert. Aus Erfahrung weiß der Zoll, dass jeder 100. Grenzüberschreiter ein Schmuggler ist. Der Zoll hält jetzt zufällig 4 Autos auf (Stichproben).

a) Welche Werte kann die Zufallsvariable annehmen?
b) Bestimme den Erwartungswert und die Standardabweichung für diese Verteilung!
c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zoll 3 Schmuggler erwischt?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zoll mindestens 1 Schmuggler erwischt?
e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Zoll höchstens 2 Schmuggler erwischt?

Beispiel:

Wie viele Kinder müsste eine Mutter mindestens zur Welt bringen, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit einen Knaben zu bekommen, wenn aus statistischen Erhebungen die Wahrscheinlichkeit für eine Knabengeburt p=0,52 gilt.

<u>Lösung:</u>

Mindestens 1 Knabe bedeutet: 1 Knabe oder 2 Knaben … oder n Knaben. Das Ereignis „mindestens 1 Knabe“ ist daher ein sehr umfangreiches zusammengesetztes Ereignis, noch dazu, wo die Gesamtzahl n der „Versuche“ unbekannt ist: $P(X\geq 1) = P(X = 1)+P(X = 2)+\ldots+P(X = n)$

Das Gegenereignis zu „mindestens 1 Knabe“ ist wesentlich einfacher, nämlich „kein Knabe“:

$P(\text{mind. } 1) = P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \binom{n}{0}\ 0{,}52^0\ 0{,}48^n = 1 - 0{,}48^n$

Wenn die Wahrscheinlichkeit für „mindestens 1 Knabe“ $\geq$ 95% betragen soll, dann ergibt sich

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}48^n \geq 0{,}95$ /-1

$-0{,}48^n \geq -0{,}05$ /·(-1)

$0{,}48^n \leq 0{,}05$ /ln

$n\cdot\ln 0{,}48 \leq \ln 0{,}05$ /:ln 0,48 =negative Zahl!

$n \geq 4{,}08$

Die Mutter muss also mehr als 4 Kinder (d.h. mindestens 5 Kinder) zur Welt bringen, um mit mindestens 95%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Knaben zu bekommen.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Wahrscheinlichkeitsrechnung 4

Binomialverteilung

1. Eine faire Münze wird sechsmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
   a. genau einmal
   b. genau zweimal
   c. nie
   d. höchstens zweimal
   e. mindestens einmal "Kopf" geworfen wird!

2. Ein fairer Würfel wird achtmal geworfen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass
   a. einmal
   b. zweimal
   c. mindestens dreimal "Eins" geworfen wird!

3. Zwei Schachspieler spielen 7 Partien gegeneinander. A ist der schwächere Spieler, seine Gewinnwahrscheinlichkeit beträgt 0,4. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass A
   a. genau 3mal
   b. höchstens 3mal
   c. mindestens 2mal gewinnt?

4. Bei einer Tombola gewinnt jedes 5. Los. Herr Maier kauft 25 Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
   a. genau 5 mal
   b. höchstens 3 mal
   c. 4 bis 6 mal gewinnt?

5. Ein Schütze trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,8. Er schießt 10 mal auf eine Scheibe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er
   a. jedesmal
   b. mindestens 8 mal trifft?

6. Angenommen, alle Wochentage treten gleich oft als Geburtstage auf.
   a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Familie mit 4 Kindern mindestens ein Sonntagskind ist?
   b. In einer Klasse sind 25 Kinder. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben nicht mehr als 3 an einem Sonntag Geburtstag?

7. 2/3 aller Hühnereier sind braun. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass unter 12 Eiern
   a. genau 8 braune
   b. mindestens 10 braune sind!

8. 5% aller Glühbirnen, die von einer bestimmten Maschine erzeugt werden, sind defekt. Bei einer Qualitätskontrolle werden 10 Glühbirnen getestet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   a. höchstens eine
   b. mindestens eine defekte darunter ist?

Lösungen:

1) a) 0,0938 b) 0,2344 c) 0,0156 d) 0,3438 e) 0,9844
2)a) 0,3721 b) 0,2605 c) 0,1348
3) a) 0,2903 b) 0,7102 c) 0,8414
4) a) 0,1960 b) 0,2340 c) 0,5460
5) a) 0,1074 b) 0,6778
6) a) 0,4602 b) 0,5119
7) a) 0,2384 b) 0,1811
8) a) 0,9139 b) 0,4013

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

d. Normalverteilung

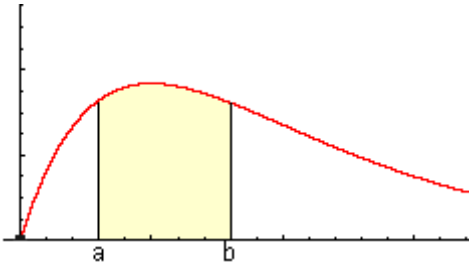
Voraussetzungen:

- **Stetige** Verteilung: Für die Zufallsvariable sind alle reellen Zahlen aus einem bestimmten Bereich vorgesehen!
- Ein Versuch hat **genau 2 Ausfallsmöglichkeiten** E und E´ und die Wahrscheinlichkeit p für das Ereignis E ist bekannt.
- Der Versuch wird **n mal unter den gleichen Bedingungen** durchgeführt. (Ziehen mit zurücklegen)

Dann liegt eine Normalverteilung vor.

Stetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Eine stetige Zufallsvariable kann (in einem bestimmten Bereich) jeden beliebigen Wert annehmen. Man kann sie durch ihre Dichtefunktion f(x) beschreiben. Die Wahrscheinlichkeit, dass x zwischen a und b liegt, entspricht der Fläche unter der Kurve, also dem Integral $\int_a^b f(x)dx$.



Die gesamte Fläche unter der Kurve ist 1 (sicheres Ereignis). Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, ist bei stetigen Verteilungen 0. Daher ist es egal, ob man P(X < a) oder P(X ≤ a) berechnet.

Auch Erwartungswert und Standardabweichung einer stetigen Verteilung werden mit Hilfe des Integrals definiert.

Die Normalverteilung

Die wichtigste stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die von C. F. Gauß (1777 - 1855) entdeckte Normalverteilung (die bekannte "Glockenkurve"):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.

Sie tritt bei vielen Größen im Alltag auf.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Das Integral dieser Funktion können wir nicht berechnen, aber das haben wir zum Glück gar nicht nötig: Durch die **Standardisierungsformel**

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

erhalten wir die **Standardnormalverteilung N(0;1)** **(N(μ=0;σ=1))**

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}z^2},$$

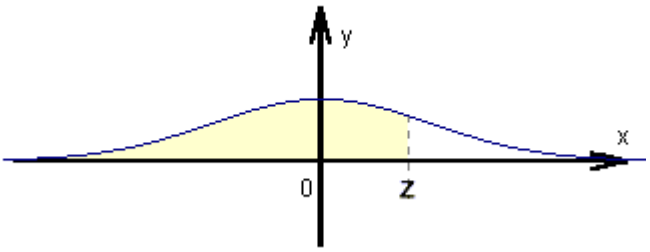
deren **Stammfunktion Φ wir in einer Tabelle nachschlagen können** (in jeder Formelsammlung).

Der Wert Φ(z) in der Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass die normierte Zufallsvariable X ≤ z ist:

P(X ≤ z) = Φ(z)

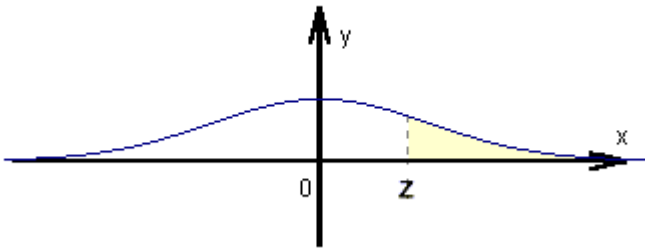
In manchen Tabellen sind nur die Werte für positive z angeführt. Aus Symmetriegründen ist

Φ(-z) = 1 - Φ(z)



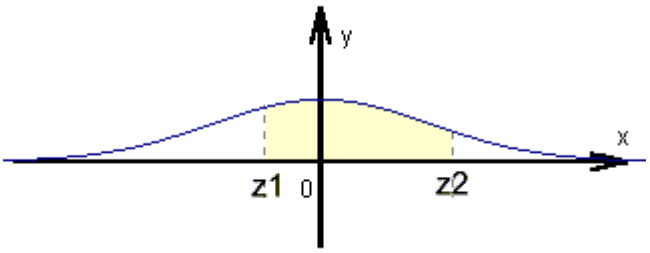
Die Wahrscheinlichkeit, dass X ≥ z ist (Gegenereignis), beträgt

P(X ≥ z) = 1 - Φ(z)



Die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen den Werten z1 und z2 liegt, beträgt

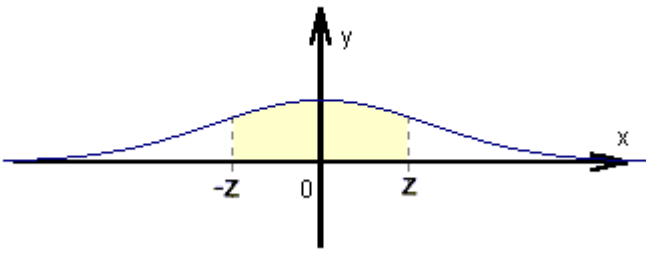
P(z1 ≤ X ≤ z2) = Φ(z2) - Φ(z1)



Soll Z in einem symmetrischen Bereich (-z, z) liegen, erhalten wir

P(-z ≤ X ≤ z) = Φ(z) - Φ(-z) = 2Φ(z) - 1

Dieser Wert wird in manchen Tabellen als D(z) angegeben.



© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Tabelle der Normalverteilung

Tabelle des Integrals $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$. Beispiel: $\Phi(1.23) = 0.8907$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.10	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.20	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.30	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.40	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.50	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.60	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.70	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.80	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
0.90	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.00	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.10	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.20	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.30	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.40	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.50	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.60	.9452	.9463	.9474	.9485	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.70	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.80	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.90	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9762	.9767
2.00	.9773	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.10	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.20	.9861	.9865	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.30	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.40	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.50	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.60	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.70	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.80	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9980	.9980	.9981
2.90	.9981	.9982	.9983	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986

Die **Standardabweichung σ** beschreibt die Breite der Normalverteilung. Es gilt näherungsweise:

- Im Intervall der Abweichung **μ ± σ sind 68,27** % aller Messwerte zu finden,
- Im Intervall der Abweichung **μ ± 2σ sind 95,45 %** aller Messwerte zu finden,
- Im Intervall der Abweichung **μ ± 3σ sind 99,73** % aller Messwerte zu finden.

Und ebenso lassen sich umgekehrt für gegebene Wahrscheinlichkeiten die **maximalen Abweichungen vom Mittelwert** finden:

- 50 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens 0,675σ vom Mittelwert,
- 90 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens 1,645σ vom Mittelwert,
- 95 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens 1,960σ vom Mittelwert,
- 99 % aller Messwerte haben eine Abweichung von höchstens 2,567σ vom Mittelwert.

Somit kann neben dem Mittelwert auch der Standardabweichung eine einfache Bedeutung zugeordnet werden.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Beispiel:

Eine Maschine erzeugt Nägel mit einer durchschnittlichen Länge von $\mu = 50$ mm. Die Länge der Nägel ist normalverteilt, die Standardabweichung beträgt $\sigma = 2{,}5$ mm.

Wieviel Prozent aller Nägel sind kürzer als 48 mm?

Normierung: $z = (48 - 50)/2{,}5 = -0{,}8$

$P(X < 48) = \Phi(-0{,}8) = 0{,}2119 = 21{,}19\%$

Wieviel Prozent aller Nägel sind länger als 51 mm?

$z = (51 - 50)/2{,}5 = 0{,}4$

$P(X > 51) = 1 - \Phi(0{,}4) = 0{,}3446 = 34{,}46\%$

Wieviel Prozent aller Nägel sind zwischen 48 und 51 mm lang?

$P(48 \leq X \leq 51) = \Phi(0{,}4) - \Phi(-0{,}8) = 0{,}4435 = 44{,}35\%$

Wie lang muss ein Nagel sein, damit er zu den 10% kürzesten gehört?

$\Phi(z) = 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad z = -1{,}28$

$x = 50 - 1{,}28 \cdot 2{,}5 = 46{,}8$ Þ er darf höchstens 46,8 mm lang sein.

Wie lang muss ein Nagel sein, damit er zu den 20% längsten gehört?

$1 - \Phi(z) = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z) = 0{,}8$ Þ $z = 0{,}84$

$x = 50 + 0{,}84 \cdot 2{,}5 = 52{,}1$ Þ er muss mindestens 52,1 mm lang sein.

In welchem symmetrischen Bereich $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ liegt die Länge von 90% aller Nägel?

$D(z) = 0{,}9 \quad \Rightarrow \quad z = 1{,}64$

$x1 = 50 - 1{,}64 \cdot 2{,}5 = 45{,}9$, $x2 = 50 + 1{,}64 \cdot 2{,}5 = 54{,}1$

90% aller Nägel sind zwischen 45,9 mm und 54,1 mm lang.

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Wenn die Anzahl der Versuche sehr groß ist, wird die Berechnung der Binomialverteilung zu aufwändig. Man kann sie dann näherungsweise durch die Normalverteilung mit demselben μ und σ ersetzen.(Faustregel: σ muss ≥ 3 sein.)

Beispiel:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 300maligem Würfeln höchstens 40mal Sechs zu werfen?

$n = 300$, $p = 1/6$ => $\mu = 300 \cdot 1/6 = 50$, $\sigma = \sqrt{(300 \cdot 1/6 \cdot 5/6)} = 6{,}45$

$z = (40 - 50)/6{,}45 = -1{,}55$

$P(X \leq 40) = \Phi(-1{,}55) = 0{,}0606$

Die Annäherung wird noch genauer, wenn man die Stetigkeitskorrektur berücksichtigt.

Im Histogramm der Binomialverteilung reicht z.B. der Streifen, der $X = 40$ entspricht, von 39,5 bis 40,5.

Für die Berechnung von $P(X \leq 40)$ nimmt man daher 40,5 als obere Grenze.

Für $P(40 \leq X \leq 50)$ nimmt man die Grenzen 39,5 und 50,5.

Im obigen Beispiel erhält man mit Stetigkeitskorrektur:

$z = (40{,}5 - 50)/6{,}45 = -1{,}47$

$P(X \leq 40) = \Phi(-1{,}47) = 0{,}0708$

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

Übungsblatt Wahrscheinlichkeitsrechnung 5

Normalverteilung

1. In Mathematanien wurde die Körpergröße aller Studenten gemessen. Es stellte sich heraus, dass die Größe normalverteilt ist, mit dem Erwartungswert $\mu = 175$ cm und der Standardabweichung $\sigma = 7{,}5$ cm.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Student
   a. kleiner als 160 cm
   b. größer als 180 cm
   c. zwischen 170 und 182 cm groß ist?

2. Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g.
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes
   a. mehr als 3000 g
   b. weniger als 2500 g
   c. zwischen 4000 und 5000 g wiegt?

3. Die Äpfel in einer Lieferung wiegen durchschnittlich 180 g, mit einer Standardabweichung von 50 g. Man kann annehmen, dass das Gewicht eine normalverteilte Zufallsvariable ist.
   Wieviel Prozent der Äpfel wiegen
   a. weniger als 150 g
   b. mehr als 175 g
   c. zwischen 200 und 250 g?

4. Eine Maschine erzeugt Holzplatten, die im Mittel 30 mm dick sind. Die Standardabweichung beträgt 0,6 mm.
   a. Bei wieviel Prozent aller Platten liegt die Dicke zwischen 29,5 und 30,5 mm?
   b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Platte dicker als 31 mm ist?

5. Die Lebensdauer eines Ersatzteils ist normalverteilt, mit $\mu = 180$ Tage und $\sigma = 40$ Tage.
   a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer weniger als 3 Monate beträgt? (1 Monat = 30 Tage)
   b. Bei wieviel Prozent aller Teile weicht die Lebensdauer um weniger als 1 Monat vom Ewartungswert ab?

6. Eine Maschine füllt Mehl in Säckchen ab. Sie ist auf ein Füllgewicht von 1006 g eingestellt, die Standardabweichung beträgt 4 g.
   a. Wieviel Prozent aller Säckchen enthalten weniger als 1000 g?
   b. Wieviel Prozent aller Säckchen enthalten zwischen 1000 g und 1010 g?
   c. Bei wie vielen Säckchen weicht das Gewicht um mehr als 10 g vom Erwartungswert ab?

7. Wie groß muss ein Student in Mathematanien sein (s. Bsp. 1), damit er
   a. zu den 20% kleinsten
   b. zu den 10% größten Studenten gehört?
   c. In welchem symmetrischen Bereich $[\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$ liegen die Größen von 95% aller Studenten?(Runde auf cm.)

8. Wie schwer muss ein Neugeborenes sein (s. Bsp. 2), damit es
   a. zu den 15% schwersten
   b. zu den 25% leichtesten gehört?
   c. In welchem symmetrischen Bereich $[\mu-\varepsilon, \mu+\varepsilon]$ liegen die Gewichte von 90% aller Neugeborenen? (Runde auf 10 g.)

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

9.
    a. 10% der Äpfel aus Bsp. 3 werden aussortiert, weil sie zu leicht sind. Wie schwer kann ein Apfel höchstens sein, wenn er aussortiert wird?
    b. In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegen die Gewichte von 50% aller Äpfel? (Quartile)

10. Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel ist normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 8,00 cm und der Standardabweichung σ = 0,15 cm.
    a. Bei wieviel Prozent der Nägel weicht die Länge höchstens um ε = 0,20 cm vom Erwartungswert μ ab?
    b. Wie sind die Toleranzgrenzen festgelegt, wenn man weiß, dass 90% der Produktion zum Verkauf freigegeben werden?

11. Eine Maschine schneidet Holzplatten mit einer durchschnittlichen Länge von 80 cm und einer Standardabweichung von 0,3 cm zu.
    a. Wie viel Prozent der Platten sind kürzer als 79,5 cm?
    b. 7,2% der Platten sind Ausschuss. Welche Abweichung vom Mittelwert wird dabei toleriert?

12. Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit μ = 100 und σ = 15.
    a. Welchen IQ muss man haben, um zu den intelligentesten 2% der Bevökerung zu gehören?
    b. Ein Ort hat 1800 Einwohner. Bei wie vielen kann man einen IQ über 120 erwarten?
    c. Wie viele Einwohner haben einen IQ zwischen 80 und 120?

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

13. Eine faire Münze wird 80 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,
    a. höchstens 45 mal
    b. zwischen 36 und 42 mal "Kopf" zu werfen?

14. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 300-maligem Würfeln mit einem fairen Würfel
    a. höchstens 40 mal
    b. mehr als 55 mal "Sechs" zu erhalten?

15. Bei einem Glücksrad beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 1/5. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 300 Versuchen
    a. mindestens 50 Gewinne
    b. zwischen (einschließlich) 55 und 65 Gewinne zu erhalten?

16. Ein Medikament hat eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 80%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 200 Patienten, die das Medikament einnehmen, höchstens 150 gesund werden?

17. Angenommen, jeder Monat kommt gleich oft als Geburtsmonat vor. Wie groß ist unter dieser Voraussetzung die Wahrscheinlichkeit, dass von den 2250 Einwohnern eines Ortes mindestens 200 im Mai Geburtstag haben?

18. Ein Weinhändler will seine Produkte per Telefonmarketing verkaufen. Es wird angenommen, dass jeder 10. Angerufene etwas bestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 250 Anrufen mindestens 20 Bestellungen eingehen?

19. 7% aller Eier werden beim Transport beschädigt. Ein Geschäft bekommt eine Lieferung von 1500 Eiern.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 120 oder mehr Eier beschädigt sind?
    b. In In welchem symmetrischen Bereich [μ-ε, μ+ε] liegt mit 95% Wahrscheinlichkeit die Anzahl der beschädigten Eier?

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt

20. Eine Firma nimmt an, dass 45% der Bevökerung ihr Produkt kennen. Bei einer Umfrage wurden 500 Personen befragt.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als 200 Personen angeben, das Produkt zu kennen?
    b. Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der Befragten, die das Produkt kennen, um mehr als 20 vom Erwartungswert ab?

21. Die freiwillige Feuerwehr eines Ortes verfügt über 120 Feuerwehrleute, von denen jeder mit 60% Wahrscheinlichkeit sofort verfügbar ist.
    a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Ernstfall mindestens 70 Feuerwehrleute zur Verfügung stehen?
    b. Gib einen 90%-Streubereich [$\mu-\varepsilon$, $\mu+\varepsilon$] für die Anzahl der verfügbaren Feuerwehrleute an!

22. Eine Fluggesellschaft bietet Linienflüge mit einem Airbus (300 Sitzplätze) an. Erfahrungsgemäß erscheinen nur 80% der Passagiere, die einen Platz gebucht haben, auch tatsächlich zum Abflug.
    a. In welchem Bereich liegt mit 95%iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
    b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem ausgebuchten Flug mindestens 250 Plätze belegt werden?
    c. Aus Sparsamkeitsgründen ist die Fluggesellschaft dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 20%igen Überbuchung (d.h. 360 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können (d.h. dass mindestens 301 Passagiere kommen)?
    d. (*) Wie viele Buchungen dürfen angenommen werden, wenn das Risiko, mindestens einen Passagier mit einem gebuchten Platz abweisen zu müssen, höchstens 1% betragen soll?

Ergebnisse

1. a) 0,0228 b) 0,2514 c) 0,5724
2. a) 0,5987 b) 0,1894 c) 0,1465
3. a) 27,43% b) 53,98% c) 26,38%
4. a) 59,35% b) 0,0475
5. a) 0,0122 b) 54,67%
6. a) 6,68% b) 77,45% c) 1,24%
7. a) < 169 cm b) > 185 cm c) [160 cm, 190 cm]
8. a) > 4030 g b) < 2660 g c) [1890 g, 4510 g]
9. a) < 116 g b) [146 g, 214 g]
10. a) 81,8% b) 8 ± 0,25 cm
11. a) 4,75% b) 80 ± 0,54 cm
12. a) 131 b) 165 c) 1470

In Klammern sind die Ergebnisse mit Stetigkeitskorrektur angegeben.

13. a) 0,8686 (0,8907) b) 0,4869 (0,5561)
14. a) 0,0606 (0,0708) b) 0,2206 (0,1977)
15. a) 0,9251 (0,9357) b) 0,5285 (0,5705)
16. 0,0384 (0,0465)
17. 0,17117 (0,1788)
18. 0,8531 (0,8770)
19. a) 0,0643 (0,0708) b) [85, 125]
20. a) 0,0122 (0,0110) b) 0,0719 (0,0658)
21. a) 0,6443 (0,6808) b) [63; 81]
22. a) [226; 254] b) 7,5% (8,5%) c) 4,3% (4,9%) d) 354

© Mag. Werner Augustin, BAKIP Klagenfurt